*

Om eksistensen og antallet til strengt uavhengige utsagnsmengder hvis tillukning under negasjon og uendelig konjunksjon omfatter hele universet av utsagn.

*

Morten Rognes

1987

*

Del I

Innledning

§ 0.1

Det er en forutsetning ved lesningen av dette skrift at leseren kjenner de grunnleggende begreper og setninger i den klassiske predikatlogikk og mengdelære. Selvom vår notasjon og terminologi ikke skulle være spesiell og i hovedtrekkene er som i Takeuti [1], vil det være en stor fordel om leseren kjenner og er fullt fortrolig med Rognes [1]. I dette foreliggende arbeid bygger vi også videre på Rognes [2], [3] slik at det strengt tatt er nødvendig at leseren er helt fortrolig med innholdet i dem. Dette skrift er derfor ikke en frittstående enhet, men må leses etter, og i sammenheng med, de arbeider som er nevnt.

Rammen for våre overlegninger her er teorien T;1 som er formulert og drøftet i Rognes [2]. Den er videre utdypet i Rognes [3]. Teorien T;1 er detaljert beskrevet i de to nevnte arbeider. Vi gir derfor ikke noe resymé her, men forutsetter at leseren har et inngående kjennskap til dem. Notasjonen fra disse arbeidene vi derfor fra nå av bli brukt uten videre og uten ytterligere kommentarer og forklaringer. Dog nevner vi at T;1 er en teori om mulige verdener og det som kan kalles presise deskriptive utsagn (propositions). Vi nevner også de følgende forhold vedrørende vår notasjon:

"I" betegner mengden av mulige verdener. "U" betegner mengden av alle presise deskriptive utsagn. Er w en mulig verden og x et utsagn betyr "True(w,x)" at utsagnet x er sant i verdenen w. "s(x)" betegner – om x er et utsagn – sannhetsmengden til x, dvs. mengden av alle de mulige verdener hvor utsagnet x er sant. "μ" betegner den funksjonen hvis domene er mengden av utsagn og som til ethvert utsagn tilordner sannhetsmengden til utsagnet. Selvom våre offisielle variabeltegn bare er dem i rekken "x","y","z","w","x'","y'",.... vil vi – delvis for leselighetens skyld bruke "Δ","Δ;1","Δ;2","∏",∏;1",..etc. som variabler som tar utsagnsmenger som verdier. Variabeltegnene "x","y","z",... etc. vil som nevnt brukes om alle entitene i universet, men vil vanligvis være forbeholdt utsagn. Vi vil vanligvis bruke "w","w;1","w;2".... for å betegne mulige verdener. Er Δ en utsagnsmengde betegner "SNu(Δ)" utsagnet som er konjunksjonen av alle utsagnene i Δ, "UNu(Δ)" betegner disjunksjonen av alle disse utsagn. Er x et utsagn er Neg(x) det utsagnet som er negasjonen av x, Vi nevner også at hhvis Δ er en utsagnsmengde så betegner "k(Δ)" konsekvensmengden til Δ, dvs. mengden av alle de utsagn som er logiske konsekvenser av utsagnene i mengden Δ. Tilslutt nevner vi at "t" betegner det nødvendig sanne, eller tautologiske, utsagn. "k" betegner det kontradiktoriske utsagn, dvs. et utsagn som ikke er sant i noen logisk mulige verdener.

§0.2

La oss så gjøre rede for målet med dette arbeid. Anta Δ er en vilkårlig utsagnsmengde. Da er C(Δ) per definisjon den minste utsagnsmengden som inneholder Δ og som er lukket under operasjonene negasjon, ie. Neg ,og uendelig konjunksjon, SNu. (Se Rognes [3], §9 og §21)

Er ∏, Δ to utsagnsmengder, og har vi at C(Δ)=∏, kaller vi Δ for en basis for ∏ akkurat i dette skrift. Er Δ en utsagnsmengde sies den å være strengt uavhengig, i symboler "SInd(Δ)", om man har, for enhver delmengde ∏ av Δ, at det finnes en milig verden w hvor alle utsagnene i ∏ er sanne og alle dem i Δ–∏ er usanne. (Se Rognes [3], §8 og §20).

Det som er vårt mål i dette arbeidet er da å belyse spørsmålet om det finnes strengt uavhengige utsagnsmengder som utgjør en basis i betydningen ovenfor for mengden av alle utsagn U, og i tilfelle det er slik, hvor mange slike basiser som eksisterer. Mao. er problemet å avgjøre om det er noe grunnlag for å hevde at (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U), og om man forutsetter dette å si noe om hva kardinaltallet til Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ)=U) er.

To av våre viktigste resultater – av dem vi har å tilby her – kan da formuleres slik: Vi vil for det første vise at det finnes en strengt uavhengig basis for mengden av alle utsagn hvis og bare hvis mengden av mulige verdener, I, er likemektig med 2^(Aleph;a) for noe aêOn. (On er klassen av ordinaltall). For det andre vil vi vise at om det finnes en strengt uavhengig basis for U så er mengden av alle slike basiser likemektig med mengden av utsagn. Dette innebærer at mengden av alle slike basiser da kan avbildes en-entydig på U. Siden U er likemektig med Pt(I) (Se Rognes [2], kommentarene i forbindelse med de grunnleggende aksiomene i T;1, U1 – U4) kan disse resultatene formuleres slik:

(i) (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ) =U) <–> (Ea)(aêOn & Cd(I) = Cd(2^(Aleph;a))

(ii) (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U) –>
Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ) =U) ≈ 2^I ≈ Pt(I).

Hoveddelen av dette essay består derfor i å gi bevis for disse to satsene innenfor rammen av T;1. Det viser seg forøvrig at bevisene blir nokså lange. Dette innebærer at de to setningene ikke kan oppfattes som helt trivielle.

§ 0.3

I dette avsnittet vil vi kommentere enkelte sider ved teoremene (i) og (ii) som fortjener en viss oppmerksomhet.

Et motiv for å formulere og bevise disse satsene er rett og slett å demonstrere ytterligere for leseren hva slags setninger som kan utledes i teorien T;1 om strengt uavhengige utsagnsmengder. Dette kan bidra til at man får et litt mer fyldig inntrykk av dette enn det man sitter igjen med etter lesningen av §8 og §20 i Rognes [3].

En annen grunn til å rette oppmerksomheten mot (i) og (ii) er den følgende: Et spørsmål man kan stille seg om mengden av mulige verdener, I, er hvor mange elementer denne mengde inneholder og om det overhodet er mulig å gi noe begrunnet svar på dette spørsmål. Den første av tesene ovenfor har en viss relevans i denne forbindelse. For anta man kunne gi en begrunnelse for at (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U). Da følger ved hjelp av (i) at I ≈ 2^(Aleph;a) for noe ordinaltall a. Dette i sin tur innebærer at I »= 2^(Aleph;a) » Aleph;0. Mao. kan da ikke kardinaltallet til mengden av mulige verdener være lik Aleph;0. Siden man antar i T;1 at Cd(I) ≥ Aleph;0 følger det at Cd(I) > Aleph;0, dvs. at I må være en overtellbar mengde. Dette gir en noe – om enn beskjeden – informasjon om størrelsen til I.

En annen sats – den følger forøvrig lett fra Lemma 1 og Lemma 2 i §1 i Del II av dette arbeid – er denne:

(EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ) = U) –> (A∏)(SInd(∏) & C(∏) = U. –> I ≈ Pt(∏))

Som man ser uttrykker denne setningen at hvis det finnes en strengt uavhengig basis for U så er kardinaltallet til I lik kardinaltallet til potensmengden til mengden av de utsagn som inngår i enhver slik basis. Også dette gir en en karakteristikk, om enn ikke numerisk, av størrelsen til I gitt at det finnes strengt uavhengige basiser for U.

La oss se på noen muligheter når det gjelder hva slags setninger som kan tenkes å implisere (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ) = U). Det er da ikke uten enhver relevans å studere noen teser som man finner i Wittgensteins Tractatus angående såkalte elementæretninger. I dette arbeid synes Wittgenstein å hevde særlig tre ting når det gjelder denne typen setninger. For det første er elementærsetninger en underart av setninger generelt. For det andre hevder Wittgenstein at elementærsetningene er uavhengige av hverandre i den forstand at om ∏ er en vilkårlig mengde med elementærsetninger er alltid den mulighet tilstede at alle setningene i ∏ er sanne mens de resterende elementærsetningene er usanne. For det tredje sier Wittgenstein at enhver setning er en sannhetsfunksjon av elementærsetninger.

Nå kan man ikke uten videre ta det for gitt at det Wittgenstein kaller setninger i Tractatus er identisk med det vi kaller for utsagn. Men hvis vi utvider L;e[Δ], språket til T;1, med et nytt primitivt predikat: "x er et elementærutsagn" og studerer teorien T;1 med språket utvidet på denne måten kan vi innenfor dette litt rikere teoretiske system formulere tre satser som synes å en meget stor likhet med de tre tesene om elementærsetninger som vi tilskrev Wittgenstein.

La E betegne klassen av elemntær utsagn. Da synes Wittgensteins første tese å ha sin motsvarighet i den følgende formel:

(A) M(E) & E Inkl U

Med andre ord er klassen av elementærutsagn en mengde og dessuten inkludert i U

Den andre tesen ovenfor synes å være analog med følgende setning:

(B) SInd(E)

Som man skjønner innebærer dette at klassen av elementærutsagn er strengt uavhengig, dvs. at er ∏ en vilkårlig delmengde av E finnes det alltid en mulig verden hvor alle utsagnene i ∏ er sanne og dem i E–∏ er usanne.

Tilslutt er det nærliggende å si at utsagnet x er en sannhetsfunksjon av utsagnene i mengden ∏ om xêC(∏). C(∏) er som tidligere bemerket den minste utsagnsmengden som inneholder ∏ og som er lukket under negasjon og uendelig konjunksjon. (Dette innebærer at C(∏) er lukket under alle de vanlige Boolske operasjoner på utsagn.)

La oss her innskyte at hvis ∏ er en på forhånd fiksert utsagnsmengde behøver ikke ethvert utagn å være en sannhetsfunksjon av dem i ∏ i denne forstand. Er ∏ f.eks. endelig er det nokså lett å vise i T;1 at U–C(∏), dvs. mengden av de utsagn som ikke er sannhetsfunksjoner av dem i ∏, er uendelig.

Den tredje Wittgensteinske tese har da sitt motstykke i den følgende setning som sier at ethvert utsagn er en sannhetsfunksjon av utsagnene i E, dvs. kan dannes ved iterert bruk av operasjonene negasjon og uendelig konjunksjon på elementene i E.

(C) (Ax)(xêU –> xêC(E))

Nå ser man forholdsvis lett at om språket til T;1 utvides med predikatet "x er et elementærutsagn" så kan man i dette utvidete teoretiske system utlede (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ) = U) fra A, B og C, siden man har, om Δ er en vilkårlig utsagnsmengde, at C(Δ) Inkl U. La oss kalle den nevnte utvidelse av T;1 for "T;1e". Da ser man at setningen:

A&B&C –> (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U)

er et teorem i T;1e. Det omvendte holder selvfølgelig ikke. man kan ikke fra eksistensen av en strengt uavhengig basis for U slutte noe om hvorvidt A, B eller C holder.

Den tanke at det finnes et sett med spesielt grunnleggende setninger som er strengt uavhengige av hverandre og som alle andre utsagn er sannhetsfunksjoner av synes å være grunnleggende innenfor det standpunkt om kalles for den logiske atomisme. Man ser fra våre betraktninger at formelen (EΔ)(SInd(Δ) & C{Δ)=U) uttrykker en del av denne grunntanken i den logiske atomisme, men at denne tesen er langt svakere. Man er altså ikke uten videre logisk atomist om man hevder at denne formelen i L;e[Δ] er sann i lys av den intenderte intepretasjon av dette språk. La oss i denne forbindelse tilslutt nevne at vi ikke har omtalt setningene A – C fordi vi ønske å hevde eksistensen av elementærsetninger, men fordi disse setningene synes å inngå som en kjerne i et logisk-metafysisk standpunkt som – om det reformuleres innenfor rammen av T;1 – impliserer eksistensen av en strengt uavhengig basis for U. Dessuten har synspunktet en viss interesse i seg selv og det har i tillegg fått et klassisk uttrykk i Wittgensteins tidlige filosofi. Våre teoremer (i) og (ii) kan derfor indirekte sies å belyse visse konsekvenser ved dette standpunkt.

Så langt har oppmerksomheten vært rettet mot (i). Det er derfor også naturlig å knytte visse kommentarer til setningen (ii). Som man ser sier denne setningen at dersom det finnes en strengt uavhengig basis for U så har mengden av slike basiser et like stort kardinaltall som klassen av utsagn. Dette teorem er muligens av marginal filsofisk interesse. Men det fremgår fra Lemma 3 – Lemma 5 i §1 i Del II av dette arbeid at disse ulike basis-mengder for U er isomorfe. Dette kan ha en viss relevans for læren om elementærsetninger ovenfor. For om man fremhever en slik basis fremfor de andre, og kaller elementene i denne for elementærutsagn, kan man spørre om med hvilken rett man fremhever akkurat denne basis. Hvorfor fremhever man ikke med like stor rett en av de uendelige mange andre som fra en strukturell synsvinkel er helt likedannet? Dette kunne muligens fremsettes som et argument mot en altfor "absoluttistisk" form for logisk atomisme. Man kunne altså i lys av dette hevde at skillet elementærutsagn/ sammensatt utsagn bare har mening i relasjon til en strengt uavhengig basis for U og da på en slik måte at de utsagn som er elementærutsagn relativt til en slik basis er de som inngår i den, mens de sammensatte utsagn, "molekylære" utsagn relativt til en slik basis er de som ikke inngår i den. Hva enten dette er riktig eller ikke synes teoremene (i) og (ii), om de sees i et slikt perspektiv, å ha en viss filosofisk relevans.

§ 0.4

La oss nå sie noe om bevisene for satsene (i) og (ii) og noe om hvordan resten av dette arbeidet er bygget opp.

Teorem (i) bevises i §1 i Del II. Når det gjelder beviset for (ii) ser man at det vil være tilstrekkelig å bevise følgende to ting:

(iii) $(E\Delta)(SInd(\Delta) \& C(\Delta)=U) \rightarrow Cd(Mg(\Delta: SInd(\Delta) \& C(\Delta)=U)) \leq Cd(Pt(I))$

samt:

(iv) $(E\Delta)(SInd(\Delta) \& C(\Delta) = U) \rightarrow Cd(Pt(I)) \leq Cd(Mg(\Delta: SInd(\Delta) \& C(\Delta)=U))$

Nå har man at den følgende, rent mengdeteoretiske, sats holder:

(v) $M(x) \& Cd(x)\geq Aleph;0 \rightarrow$
$Cd(Pt(x)) \leq Cd(Mg(g: g: x–(1\text{-}1,på)–>x))\leq Cd(x^x)$

Denne setningen bevises i § 2 under tittelen Lemma 11. Den bevises der på basis av visse andre setninger: Lemma 8 – Lemma 10.

Videre har man også nytte av den følgende, igjen rent mengdeteoretiske, sats:

(vi) M(x) & Cd(x)≥ Aleph;0 –> Pt(x) ≈ (x^x)

Denne er bevist i §2; man kan studere Lemma 12 i den paragrafen. Fra (v) og (vi) ser man at vi har:

(vii) M(x) & Cd(x)≥Aleph;0 –> Pt(x) ≈ Mg(g: g: x –(1-1,på)–>x)

I lys av (vii) vil det derfor være tilstrekkelig å bevise den følgende setning for å bevise at (iii) ovenfor holder:

(viii) (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U) –>
Cd(Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ) =U))≤ Cd(Mg(g: g: I –(1-1,på)–>I))

For å bevise (viii) er det så i sin tur tilstrekkelig å bevise:

(ix) (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ) = U) –>
(EX)(X: Mg(g: g: I –(1-1,på)–>I) –(på)–> Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ) = U))

Dette er da også hva vil bevise i §1. Der viser vi nettopp at (ix) holder (Se Teorem 2) og det på grunnlag av visse hjelpesetninger: Lemma 1 – Lemma 7. Fra (ix), (v), (vi) og (vii) følger så (iii) som er oppført som Teorem 4 i §2.

Når det gjelder (iv) ser man at det er tilstrekkelig å bevise:

(x) (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ) = U) –>
(Ef)(f: Pt(I) –(1-1)–> Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ) = U))

For å vise dette er det så i sin tur tilstrekkelig å bevise:

(xi) (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ) = U) –>
(EX)(M(X) & X≈ I &
(Ef)(f: Pt(X) –(1-1)–> Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ) = U))

(xi) bevises i §3 og er der oppført som Teorem 5. Ved å gjennomføre beviset for alle disse setningene som vi nå har nevnt, ie. (iii) – (xi) vil vi derfor ha etablert satsene (i) og (ii).

Vi bemerker at beviset for (ix) er nokså langt fordi vi først må definere en avbildning X med de egenskapene som er nevnt i denne sats. Konstruksjonen av denne avbildningen er ikke helt enkel. Dessuten må man verifisere at X har de egenskapene som kreves, bla. at X(x) er strengt uavhengig og at C(X(x))=U om xêDom(X). Når det skal gjennomføres detaljert strekker da beviset seg over noen sider.

Også beviset for (xi) inneholder en del temmelig kompliserte bevisdetaljer. Dette skyldes delvis at den definisjonen vi gir av avbildningen f som er nevnt i satsen er nokså komplisert. Vi har gjort så godt vi har kunnet for å finne en så enkel definisjon som mulig og dermed et enkelt bevis. Men det hele strekker seg likevel over et betraktelig antall sider når det skal gjennomføres med alle detaljer.

Tilslutt nevner vi at normalformsteoremet for utsagn (Se Rognes [3], §21, Teorem 33) spiller en vesentlig rolle i beviset for Lemma 1 i §1. Dette lemma er så i sin tur vesentlig for vårt bevis for (ix). Dette skulle gi en en ytterligere illustrasjon til den påstand at dette teorem er et nyttig verktøy ved løsningen av mange av de problemer som kan stilles i forbindelse med utsagnsteorien T;1.

****

Del II

§ 1

Vi vil først gi bevis for den følgende hjelpesetning:

Lemma 1 (SInd(Δ) & C(Δ)=U) <–> (ΔêPt(U) &
(E!f)(Func(f) & f: I –(1-1,på)–>Pt(Δ) & (Aw)(wêI –>
s[K(SNu(f‘w),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–f‘w))))] = {w})))

Bevis: (I) Vi tar først sikte på å bevise kondisjonalen mot høyre i denne hjelpesetningen. Anta derfor;

(1) SInd(Δ) & C(Δ)=U. Da har vi ved hjelp av definisjonen av "SInd(Δ)" at (2) ΔêPt(U). Definer en funksjon f;0 på følgende måte:

(3) f;0= Mg(<w,Mg(x: xêΔ & True(w,x))>: wêI)

Det er lett å vise at (4) Cor(f;0). (Leseren kan selv sjekke dette.) Videre ser man også lett at :

(5) (Aw)(wêI –> f;0(w) Inkl Δ). Det følger at:

(6) Rgn(f;0) = Mg(f;0(w): wêI) Inkl Pt(Δ). Man verifiserer også uten noen problemer at (7) Dom(f;0) = I.

(A) Vi ønsker først å bevise:

(+) (Aw)(wêI –> s[K(SNu(f;0‘w),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–f;0‘w))))] = {w})

Anta for vilkårlig w at (8) wêI. Fra dette og (3) følger:

(9) f;0(w) = Mg(x: xêΔ & True(w,x)). Det følger at:

(10) Δ – f;0(w) = Δ – Mg(x: xêΔ & True(w,x)
= Mg(y: yêΔ & ¬(yêΔ & True(w,y)))
= Mg(: yêΔ & ¬(True(w,y)))

Anta zê(Δ-f;0(w) for vilkårlig z. Da har man i lys av (10) at ¬(True(w,z)) & zêU. Det følger da at True(w,Neg(z)). (Jmf. definisjonen av Neg). Vi har følgelig:

(Az)(zê(Δ–f;0(w)) –> True(w,Neg(z)))

Herav: (11) True(w, SNu(Mg(Neg(z): zê(Δ–f;0(w)))))

Fra (9) følger videre (Ax)(xêf;0(w) –> True(w,x)) og derfor:

(12) True(w,SNu(f;0(w))). Fra (11) og (12) følger i lys av definisjonen av operasjonen K at:

(13) {w} Inkl s[K(SNu(f;0‘w),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–f;0‘w))))]

Det er nå nødvendig å vise at inklusjonen i (13) kan erstattes med identitet. Fra fullstendighetsaksiomet for utsagn, U4, følger at μ;-1({w})êU. Fra dette, (1) og normalformsteoremet for C (Se Rognes [3], §21, Teorem 33) følger eksistensen av ∏ der man for det første har at:

(14) ∏êPt(Pt(Δ))

og dessuten har at:

(15) μ;-1({w}) = UNu[Mg(y: (ED)(Dê∏ &
y= K(SNu(Mg(Neg(r): rêD)), SNu(Δ–D))))]

Er ∏=ø vil vi i lys av (15) ha at:

μ;-1({w}) = UNu(ø) = (Iy)(yêU & s(y)=Mg(w:wêI & (Er)(rêø & True(w,r)))
= (iy)(yêU & s(y)=ø) = k

Men dette er umulig siden s(μ;-1({w}))≠ø. Det følger derfor at :

(16) ∏≠ø

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes D;1, D;2 der:

(17) D;1,D;2ê∏ & D;1≠D;2. Da har vi:

(18) (x;0êD;1 & ¬(x;0êD;2)) for noe x;0, eller omvendt.

Vi ser her bare på det første tilfelle siden det andre kan behandles på en helt analog måte. Siden ∏êPt(Pt(Δ)) har vi at ∏ Inkl Pt(Δ) og derfor at

(18.1) D;1,D;2 Inkl Δ

Sett nå per definisjon:

(19) r;1= K(SNu(Mg(Neg(r): rêD;1)), SNu(Δ–D;1))

r;2= K(SNu(Mg(Neg(r): rêD;2)), SNu(Δ–D;2))

Siden man ifølge (1) har SInd(Δ) følger det at: (20) s(r;1)≠ø & s(r;2)≠ø. Siden x;0êD;1 i lys av (18) har man at Neg(x;0)êMg(Neg(r): rêD;1)U(Δ– D;1). Vi har derfor:

(21) s(r;1) Inkl s(Neg(x;0)). På den annen side:

x;0ê(Δ-D;2) Inkl (Mg(Neg(r): rêD;2)U(Δ–D;2))

Det følger at (22) s(r;2) Inkl s(x;0). Fra (21) og (22) følger at

s(r;1)Ωs(r;2) Inkl s(x;0)Ω(I–s(x;0) = ø. Dette innebærer at:

(23) s(r;1)Ωs(r;2)=ø Vi har at (24) s(r;1)Us(r;2) Inkl s(μ;-1({w})) i lys av (15) og (19) og det faktum at (17) antas å holde. Men fra (20), (23) og (24) følger at:

{w;1,w;2} Inkl {w} = s(μ;-1({w})) for noen w;1, w;2 der w;1≠w;2. Dette er imidlertid umulig. Det følger herav at (17) er gal. Fra dette og (16) følger eksistensen av D slik at (25) ∏={D} , og fra dette og (15) følger at:

(26) μ;-1({w}) = K(SNu(Mg(Neg(r): rêD)), SNu(Δ–D))

Vi må også selvfølgelig ha at (27) D Inkl Δ.

Anta nå for reduktio ad absurdum at (28) f;0(w)≠(Δ–D). Da finnes x;1 der:

(29) x;1ê(Δ–D) & ¬(x;1êf;0(w)) eller omvendt. Vi ser igjen bare på det ene av disse to tilfellene siden det andre kan behandles på en helt analog måte. Siden x;1ê(Δ–D) har vi at x;1êMg(Neg(r): rêD)U(Δ–D) og derfor i lys av (26) at

(30) s(μ;-1({w})) Inkl s(x;1).

Siden ¬(x;1êf;0(w)) har vi at x;1ê(Δ–f;0(w)) og derfor at:

neg(x;1)êMg(Neg(r): rê(D–f;0(w))U f;0(w). Fra dette og (13) følger

(31) {w} Inkl s(Neg(x;1)). Men fra (30) og (31) kan man utlede:

wês(x;1)Ωs(Neg(x;1)) som åpenbart er umulig. Det følger at det ikke kan finnes x;1 som oppfyller kravet (29). Siden det heller ikke kan finnes x;1 der ¬(x;1ê(Δ–D))& x;1êf;0(w) (leseren får selv sjekke dette) følger det at

(32) f;0(w)=(Δ–D) og derfor, siden D Inkl Δ, at:

(33) D= Δ– f;0(w). Fra dette og (26) følger:

{w} = s[K(SNu(Mg(Neg(r): rêΔ–f;0(w))), SNu(f;0(w)))]

Dette avslutter beviset for (+).

(B) Vi har ennå ikke vist at f;0 er på Pt(Δ). Dette vil nå bli gjort. Det er tilstrekkelig å vise:

(++) (∏)(∏êPt(Δ) –> (Ew)(wêI & f;0(w) = ∏))

Anta derfor for vilkårlig ∏ at (34) ∏ Inkl Δ. Siden SInd(Δ) følger at: Cons(∏UMg(Neg(r): rê(Δ–∏))). Fra definisjonen av konsistens og definisjonene av K og SNu følger herav:

(35) wês(K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–∏))))) for noe w der (36) wêI. Fra (36) og (+) følger:

(37) {w} = s(K(SNu(f;0(w)), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–f;0(w))))))

Anta nå for reduktio ad absurdum at f;0(w) ≠∏. Da finnes x;0 der:

(39) x;0êf;0(w) & ¬(x;0ê∏) eller omvendt. Vi ser bare på dette tilfellet siden det andre kan behandles på en helt analog måte. Fra (39) har vi x;0ê(Δ–∏) og derfor

Neg(x;0)êMg(Neg(r): rê(Δ–∏)). Fra dette og (35) følger wês(Neg(x;0)). Men fra (39) har vi også, i lys av (37), at: wês(x;0). Det følger at

wês(x;0)Ω s(Neg(x;0))=ø som åpenbart er umulig. Siden det andre tilfelle kan behandles på en lignende måte kan det konkluderes med at f;0(w)=∏ for noe wêI. Dette viser at (++) holder.

(C) Det er nødvendig å bevise at f;0 er entydig bestemt. Anta derfor for vilkårlig f at :

(40) Func(f) & f: I –(1-1,på)–>Pt(Δ) & (Aw)(wêI –>
s[K(SNu(f‘w),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–f‘w))))] = {w})

Det som ønskes bevist er at (+++) f=f;0. Anta for reduktio ad absurdum at f≠f;0. Da må det finnes w der (41) wêI & f;0(w)≠f(w). Da finnes det x;1 slik at

(41.1) x;1êf;0(w) & ¬(x;1êf(w)) eller omvendt.

Igjen ser vi bare på det første av disse to tilfellene. Siden wêI følger det fra henholdsvis (40) og (+) at:

(42) s[K(SNu(f‘w),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–f‘w))))] = {w}

(43) s[K(SNu(f;0‘w),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–f;0‘w))))] = {w}

Fra (41.1) og (43) følger wês(x;1). Fra (41.1) og (42) følger:

Neg(x;1)êMg(Neg(r): rê(Δ–f(w)) og derfor at wês(Neg(x;1). Men da følger wês(x;1)Ωs(Neg(x;1))=ø. Dette er umulig. Siden det andre tilfellet, ie. ¬(x;1êf;0(w)) & x;1êf(w), behandles på lignende måte kan vi konkludere med at f=f;0. Det følger at f;0 er entydig bestemt.

Beviset for kondisjonalen mot høyre i Lemma 1 er nå fullført. Imidlertid må det gis et bevis for kondisjonalen mot venstre. Dette gjør vi nå:

(II) Anta (1) Func(f) & f: I –(1-1,på)–>Pt(Δ) &ΔêPt(U) & (Aw)(wêI –>
s[K(SNu(f‘w),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–f‘w))))] = {w})

for noe f. Vi må først vise at SInd(Δ). For dette formål er det nok å vise:

(‡) (A∏)(∏êPt(Δ) –> Cons(∏U Mg(Neg(r): rê(Δ–∏))))

Anta derfor for vilkårlig ∏ at (2) ∏êPt(Δ). Ifølge (1) finnes det da w;0êI slik at (3) f(w;0)=∏. Fra dette og (1) følger videre:

s[K(SNu(f‘w;0),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–f‘w;0))))] = {w;0}

Men herav utleder vi lett Cons(∏U Mg(Neg(r): rê(Δ–∏))). Dette viser at (‡) holder.

Det er imidlertid også nødvendig å gi bevis for: (‡‡) C(Δ)=U. Det er ganske opplagt at C(Δ) Inkl U. (Se Teorem 31, §21 i Rognes [3]). Vi må imidlertid også vise (4) U Inkl C(Δ). Anta derfor for vilkårlig x at (5) xêU. Da har vi (6) s(x) Inkl I. Sett per definisjon:

(7) k(w) = K(SNu(f‘w),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–f‘w))))

Da har vi: (8) (Aw)(wêI –> K(w)êC(Δ)). (Se det teoremet i Rognes [3] som ble nevnt ovenfor.) Nå har man fra (1) at s(k(w)) ={w} for alle wêI. Det følger at s(x) = UN(Mg(s(k(w)): wês(x)) og derfor at: x=UNu(Mg(k(w): wês(x))). (Jmf. definisjonen av UNu.) Nå har man fra (8) at Mg(k(w): wês(x)) Inkl C(Δ). Siden C(Δ) er lukket under UNu har vi derfor at x=UNu(Mg(k(w): wês(x)))êC(Δ). Dermed har vi vist at C(Δ)=U.

Det har nå blitt levert et fullstendig bevis for Lemma 1. **QED**.

Vi studerer så den følgende hjelpesetning:

Lemma 2 [SInd(Δ;1) & C(Δ;1)=U & SInd(Δ;2) & C(Δ;2) =U] –> Δ;1 ≈ Δ;2

Bevis: Fra hypotesene i denne satsen og Lemma 1 fremgår det at det finnes f;1, f;2 der:

f;1: I –(1-1,på)–> Pt(Δ;1) & f;2: I –(1-1,på)–> Pt(Δ;2)

Setter man nå g = f;2°((f;1);-1) har man:

(1) g: Pt(Δ;1) –(1-1,på)–>Pt(Δ;2). Det følger herav at Pt(Δ;1) ≈ Pt(Δ;2). Anta ¬(Δ;1≈Δ;2) for reduktio ad absurdum. Da har vi enten Δ;1 « Δ;2 eller Δ;2«Δ;1. Vi ser bare på det første tilfellet siden det andre blir helt analogt. Er Δ;1«Δ;2 har vi Cd(Δ;1) < Cd(Δ;2). Men fra dette følger Cd(Pt(Δ;1))< Cd(Pt(Δ;2)) som strider mot (1). Det følger at man hverken kan ha Δ;1«Δ;2 eller Δ;2«Δ;1. Da må man i lys av setningen (Ax)(Ay)(M(x) &M(y) –> (x«y v x≈y v y«x)) ha at Δ;1≈Δ;2. Dette viser at satsen holder. **QED**.

Vi gir nå et bevis for den følgende sats som er identisk med formel (i) i Del I:

Teorem 1 (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U) <–> (Ea)(aêOn & I ≈ 2^(Aleph;a))

Bevis: (I) Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre. Anta:

(1) SInd(Δ) & C(Δ) = U for noe Δ. Fra (1) og Lemma 1 kam man slutte at det finnes en f der f: I –(1-1,på)–> Pt(Δ). Man har Δ≈ Aleph;a for et eller annet ordinaltall aêOn. Siden I ≈ Pt(Δ) ≈ 2^Δ ≈ 2^(Aleph;0) følger det at (Ea)(aêOn & I ≈ 2^(Aleph,a)) som er det vi ønsker.

(II) Det er også nødvendig å bevise kondisjonalen mot venstre i teoremet. Anta derfor at (1) (Ea)(aêOn & I ≈ 2^(Aleph,a)). da finnes det a der

aêOn & I ≈ 2^(Aleph;a)

Sett per definisjon: A= Aleph;a. Da har vi (2) I ≈ 2^A. Fra dette følger eksistensen av en funksjon g der:

(3) g: I –(1-1,på) –> 2^A.

La x være et element i A og betrakt først Mg(f: fê2^A & f(x)=1). Bildet av denne mengden over g;-1 vil da være en mengde med mulige verdener som entydig bestemmer et utsagn u(x). Vi setter derfor per definisjon:

(+) u(x) = μ;-1(Mg(g;-1(f): fê2^A & f(x)=1)) om xêA

Vi setter videre: Δ= Mg(u(x): xêA). Det vi nå ønsker å vise er at:

(#) SInd(Δ) & C(Δ) = U

Vi viser først at:

(4) (Ax)(Ay)(x,yêA & x≠y –> u(x)≠u(y))

Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes x,y der (5) x,yêA & x≠y og der det dessuten er slik at (6) u(x)≠u(y). Fra (6) og (+) følger:

(6.1) μ;-1(Mg(g;-1(f): fê2^A & f(x)=1)) = μ;-1(Mg(g;-1(f): fê2^A & f(y)=1))

Siden μ er en-entydig følger:

(7) Mg(g;-1(f): fê2^A & f(x)=1) = Mg(g;-1(f): fê2^A & f(y)=1)

Siden g er en en-entydig funksjon følger videre fra dette:

(8) Mg(f: fê2^A & f(x)=1) = Mg(f: fê2^A & f(y)=1)

definer nå f;0 ved å sette at f;0(z)=1 om z=x og f;0(z)=0 om zê(A–{x}). Da har vi klart nok at f;0ê2^A. Men vi har åpenbart at f;0(x)=1 & f;0(y)=0 siden yêA–{x}. det følger at (8) ikke holder. Men dette innebærer at det ikke kan finnes x,y som oppfyller kravene (5) og (6) samtidig. Det følger at (4) holder.

Fra det vi så langt har bevist fremgår det at:

(9) u: A –(1-1,på)–> Δ

Vi ønsker nå å gi et bevis for:

(10) xêA –> Neg(u(x)) = μ;-1(Mg(g;-1(f): fê2^A & f(x)=0))

Anta xêA. (a) Vi viser først inklusjonen mot høyre i (10). Anta for vilkårlig w at wês(Neg(u(x))). Da har man wê(I– s(u(x))). Dette innebærer i lys av definisjonen av "u(x)" at:

wêI & ¬(wêMg(g;-1(f): fê2^A & f(x)=1))

Herav: (11) (Af)(fê2^A & f(x)=1 –> w≠g;-1(f)). Siden wêI har vi g(w)ê2^A. Fra dette og (11) følger, siden w= g;-1(g(w)) at g(w)(x)≠1. Da g(w)(x)=0. Vi har altså at:

w= g;-1(g(w)) & g(w)ê2^A & g(w)(x)=0. Da følger:

wêMg(g;-1(f): fê2^A & f(x)=0).

(b) Vi viser så at inklusjonen mot venstre i konsekventen i (10) holder:

Anta w=g;-1(f) der fê2^A & f(x)=0. Da har man:

wêI & ¬(wêMg(g;-1(f): fê2^A & f(x)=1). I lys av definisjonen av "u(x)" innebærer dette at wêI & ¬(wês(u(x))). Herav følger wê(I– s(u(x)))= s(Neg(u(x))). Dette gir oss et fullstendig bevis for (10).

Vi tar nå sikte på å bevise (#). Anta for vilkårlig ∏ at (12) ∏êPt(Δ). Fra dette, (9) og definisjonen av Δ følger det at det finnes y Inkl A slik at

∏= Mg(u(x): xêy). Vi må nå vise at :

(13) s(K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–∏))))) ≠ ø.

Definer h;0 ved å sette at h;0(x)=1 om xêa og at h;0(x)=0 om xê(A–y). Da har vi (14) h;0ê2^A. Sett w;0= g;-1(h;0). Anta for vilkårlig x at xê∏. Da har vi at det finnes z slik at x=u(z) og zêy. Da har man videre:

h;0(z)=1 & h;0ê2^A & w;0=g;-1(h;0))

Det følger at w;0ês(u(y)). Vi har derfor (15) (Ax)(xê∏ –> True(w;0,x)).

Anta xêMg(Neg(r): rê(Δ–∏)). Da finnes r slik at x=Neg(r) & rê(Δ–∏). Det følger da i lys av (9), (12) og det at ∏=Mg(u(z): zêy) at: r=u(z) & zê(A-y) for noe z. Da har man h;0(z)= 0 & h;0ê2^A & w;0= g;-1(h;0)). Fra dette og (10) følger så True(w;0, Neg(r)) og derfor True(w;0,x).

Vi har nå vist:

(16) (Ax)(xêMg(Neg(r): rê(Δ–∏)) –> True(w;0,y)). Men fra (15) og (16) følger (13). Siden ∏ var vilkårlig element i Pt(Δ) har vi nå vist at:

(17) SInd(Δ)

Det skulle være klart at C(Δ) Inkl U. Det er imidlertid nødvendig å bevise inklusjonen den andre veien. Anta derfor for vilkårlig x at xêU. Da har man s(x) Inkl I. Vi viste ovenfor at:

(18) (A∏)(∏êPt(Δ) –> (Ew)(wêI & wês[K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–∏))))]))

Det vi nå ønsker å vise er at:

(19) (A∏)(∏êPt(Δ) –> (Ew)(wêI & s[K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–∏))))]={w}))

Anta derfor for reduktio ad absurdum at :

(20) ∏êPt(Δ) & w;1,w;2êI & w;1≠w;2 og dessuten at:

(21) {w;1} Inkl s[K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–∏))))]

(22) {w;2} Inkl s[K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–∏))))]

for å vise at man da kan utlede en motsigelse. I lys av (18) er dette tilstrekkelig for å etablere (19).

Det er to muligheter:

Tilfelle (i): ∏=ø. I så fall har vi at:

∏UMg(Neg(r): rê(Δ–∏)) = Mg(Neg(r): rêΔ)

Fra (21), (22) og (23) følger i dette tilfelle at:

(24) {w;1} Inkl s[SNu(Mg(Neg(r): rêΔ))] &
{w;2} Inkl s[SNu(Mg(Neg(r): rêΔ))]

Vi har w;1= g;-1(f;1) & w;2= g;-1(f;2) der f;1≠f;2 og f;1,f;2ê2^A i lys av (3) og (20). Siden f;1≠f;2 har man da at f;1(x)≠f;2(x) for noe xêA. Anta f;1(x)=1. Da har man at w;1ês(u(x)) & u(x)êΔ. Men siden u(x)êΔ har vi Neg(u(x))êMg(Neg(r): rêΔ) og derfor i lys av (24) at w;1ês[SNu(Mg(Neg(r): rêΔ))] Inkl s(Neg(u(x))). Dette er umulig. Er på den annen side f;1(x)=0 må man ha at f;2(x)=1. Da har vi
w;2=g;-1(f;2) & f;2ê2^A & f;2(x)=1. Da w;2êu(x). Men fra (24) følger på samme måte som rett ovenfor: w;2ês(Neg(u(x))). som igjen gir oss en motsigelse. Det følger at dette tilfellet er utelukket.

Tilfelle (ii): ∏≠ø. Som ovenfor har vi at det må finnes x, f;1, f;2 der:

w;1= g;-1(f;1) & w;2= g;-1(f;2) & f;1(x)≠f;2(x) & f;1,f;2ê2^A & xêA

Er f;1(x)= 1 har vi da w;1ês(u(x)) & u(x)êΔ & f;2(x)=0. Det er da to muligheter: Er u(x)ê(Δ–∏) har vi Neg(u(x))êMg(Neg(r): rê(Δ–∏)) og derfor i lys av (21) at w;1ês(Neg(u(x))) som er umulig. Er u(x)ê∏ har vi, siden f;2(x)=0, i lys av (10) at w;2ês(Neg(u(x))). Men fra (22) og det at u(x)ê∏ følger at w;2ês(u(x)). Dette gir oss også en motsigelse.

Man resonnerer på tilsvarende måte om f;1(x)=0.

I alle tilfelle kan vi altså utlede en motsigelse om man går ut fra at (20) – (22) holder for visse entiteter ∏, w;1 og w;2. Dette viser at (19) holder.

Det er imidlertid også nødvendig å gi et bevis for:

(25) (Aw)(wêI –> (E∏)(∏êPt(Δ) &
s[K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–∏))))] = {w}))

La oss gi et bevis:

Anta wêI. Da finnes fê2^A slik at w=g;-1(f). Definer ∏ ved:

∏ = Mg(u(x): xêA & f(x)=1)

Da har vi åpenbart (Ay)(yê∏ –> wês(y)). Anta zêMg(Neg(r): rê(Δ–∏)) for vilkårlig z. Da følger at det finnes r der z=Neg(r) & rê(Δ–∏). Fra dette kan man slutte at:
r=u(x;1) & x;1êA for noe x;1 i lys av definisjonen av Δ. Men ¬(rê∏). Dette innebærer i lys av definisjonen av ∏ som ble gitt rett ovenfor at:

¬(Ex)(r=u(x)& xêA & f(x)=1). Mao. : (Ax)(xêA & r=u(x) –> f(x)=0).

Det følger da at f(x;1)=0. I lys av (10) innebærer dette at:

wês(Neg(u(x;1)))= s(Neg(r))=z.

Men z var et vilkårlig element i Mg(Neg(r): rê(Δ–∏)). Vi har derfor vist:

(Az)(zêMg(Neg(r): rê(Δ–∏)) –> wês(z))

Vi har nå vist: wês[K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–∏))))]. Fra dette og (19) følger så (25) siden ∏êPt(Δ).

Siden s(x) Inkl I når xêU kan vi for hver wês(x) velge ut en mengde D(w)êPt(Δ) slik at

s[K(SNu(D(w)), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–D(w)))))] = {w}

Setter vi per definisjon k(w) = K(SNu(D(w)), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ–D(w))))) har vi da at:

s(x) = UN(Mg({w}: wês(x))) = UN(Mg(s(k(w)): wês(x)) =
s(UNu(Mg(k(w): wês(x)).

Men k(w)êC(Δ) om wêI og C(Δ) er lukket under operasjonen UNu.
(Se Rognes [3]). Det følger derfor at xêC(Δ). Vi har dermed vist at U Inkl C(Δ). Dette avslutter beviset for Teorem 1. **QED**.

Ved hjelp av dette teoremet kan man vise at hvis T;1 utvides med

(EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U) som et nytt ikke-logisk aksiom får man som resultat en konsistent teori om T;1 er konsistent. Man kan også bruke Teorem 1 til å bevise at (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U) er uavhengig av T;1.

Lemma 3 Anta g: I –(1-1,på) –>I og at h= (dxêU)(μ;-1(g‘‘(s(x)))). Da gjelder:
(a) Xê(Pt(U)–{ø}) –> h(SNu(X)) = SNu(Mg(h(x): xêX))
(b) yêU –> h(Neg(y)) = Neg(h(y))

Bevis: *Ad(a)* Anta X Inkl U & X≠ø. Anta dessuten for vilkårlig w at wês(h(SNu(X))). Siden man har:
wês(h(SNu(X))) = s(μ;-1(g‘‘(s(SNu(X))))=g‘‘s(SNu(X) følger at wêg‘‘(s(SNu(X))). Dette er ekvivalent med at wêMg(g(r): rês(SNu(X))) som i sin tur er ekvivalent med den følgende formel:
(1) (Er)(w=g(r) & (Ay)(yêX –> rês(y)))
På den annen side har man vi:
wês(SNu(Mg(h(x): xêX)
<–> (Ay)(yêMg(h(x): xêX) –> wês(y))
<–> (Ay)((Ex)(xêX & y=h(x)) –> wês(y))
<–> (Ay)(Ax)((xêX & y=h(x)) –> wês(y))
<–> (Ax)(xêX –> (Ay)(y=h(x) –> wês(y)))
<–> (Ax)(xêX –> wês(h(x)))
<–> (Ax)(xêX –> wêg‘‘s(x))
<–> (2) (Ax)(xêX –> (Er)(w=g(r) & rês(x)))
Vi viser at (2) impliserer (1). Siden X≠ø finnes a der aêX. Fra dette og (2) følger for noe r at w=g(r) & rês(a). Anta yêX for vilkårlig y. Da finnes ifølge (2) r;1 slik at w=g(r;1) & r;1ês(y). Men da g(r;1)=g(r). Herav r=r;1ês(y). Det følger at vi har:
w=g(r) & (Ay)(yêX –> rês(y)). Herav følger så (1). Det er forøvrig lett å se at (1) impliserer (2). resonnementet til fordel for dette overlates derfor til leseren.
Ad (b) Anta yêU. Da har vi:
wês(h(Neg(y)))
<–> wês(g‘‘(s(Neg(y))))
<–> wês(g‘‘(I–s(y)))
<–> (1) (Er)(w=g(r) & rê(I–s(y)))
På den annen side:
wês(Neg(h(y)))
<–> wê(I–s(h(y)))
<–> wêI & ¬(wês(h(y)))
<–> wêI & ¬(wêMg(g(r): rês(y)))
<–> (2) wêI & (Ar)(rês(y) –> w≠g(r))
Vi skal vise at (1) og (2) er ekvivalente.
Først viser vi at (1) impliserer (2): Fra (1) følger at det finnes r der w=g(r) & rê(I–s(y)) Anta r;2ês(y) for vilkårlig r;2. Da r;2≠r. Det følger da, siden g er en-entydig at g(r)≠g(r;2). Da w≠g(r;2). Dette viser at vi har (Ar)(rês(y) –> w≠g(r)). d dernest viser vi at (2) impliserer (1): Anta wêI & (Ar)(rês(y) –> w≠g(r)). Siden wêI & g: I –(1-1.på)–> I finnes rêI slik at w=g(r). Fra dette og (2) følger
rêI & ¬(rês(y)). Dette innebærer at rê(I-s(y)). Vi har derfor w=g(r) & rê(I–s(y)). herav følger så (Er)(w=g(r) & rê(I–s(y))), dvs. (1). **QED**.

Lemma 4 Anta g: I –(1-1,på) –>I og at h= (dxêU)(μ;-1(g‘‘(s(x)))). Da gjelder:

h: U –(1-1,på) –> U

Bevis: Det er åpenbart at h er en funksjon og at Dom(h) = U. Det er nødvendig å vise at h er en-entydig. Anta derfor for reduktio at absurdum at det finnes x,y der (1) x,yêU & x≠y og der man har (2) h(x)=h(y). Fra (2) og definisjonen av h følger : μ;-1(g‘‘(s(x))) = μ;-1(g‘‘(s(y))). Siden μ er en-entydig følger herav:
g‘‘(s(x)) = g‘‘(s(y)). Dette impliserer i sin tur, siden g er en-entydig at s(x) = s(y). Herav x=y som strider (1). Det er også påkrevet og vise at h er *på* U. Anta xêU og sett per definisjon u= μ;-1(g;-1‘‘(s(x))). Vi har g;-1‘‘s(x) Inkl I og derfor at uêU.
Det følger at:

h(u) = μ;-1(g‘‘(s(μ;-1(g;-1‘‘(s(x)))))) = μ;-1(g‘‘(g;-1‘‘s(x))) = μ;-1(s(x)) = x

Dette viser at satsen holder. **QED**.

Lemma 5 [g: I –(1-1,på) –>I & h= (dxêU)(μ;-1(g‘‘(s(x)))) &
(EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ) = U)] –> SInd(h‘‘Δ) & C(h‘‘Δ) = U

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder, mao. anta:

(1) g: I –(1-1,på) –>I
(2) h= (dxêU)(μ;-1(g‘‘(s(x))))
(3) (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ) = U)

Vi må først vise: (+) SInd(h‘‘Δ). Anta derfor for vilkårlig ∏ at (4) ∏êPt(h‘‘Δ). Siden h er en-entydig og på U finnes det da en ∏;1 der:

(5) ∏;1 Inkl Δ & h‘‘∏;1 = ∏

Fra (3) og (5) følger at:

(6) Cons(∏:1U Mg(Neg(r): rê(Δ–∏;1)))

Videre følger fra (3), (5) og Lemma 1 at det finnes w slik at:

(7) {w} = s[K(SNu(∏;1),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–∏;1))))]

Herav: μ;-1({w}) = K(SNu(∏;1),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–∏;1)))), eller ekvivalent:

(8) μ;-1({w}) = SNu(∏;1 U Mg(Neg(y): yê(Δ–∏;1)))

Ved hjelp av (8) og Lemma 3 har vi:

(9) h(μ;-1({w})) = SNu(Mg(h(x): xê[∏;1 U Mg(Neg(y): yê(Δ–∏;1))]))
= SNu(Mg(h(x): xê∏;1) U
Mg(h(x): xêMg(Neg(r): rê(Δ–∏;1))))
= SNu(h‘‘∏;1 U Mg(Neg(h(r)): rê(Δ–∏;1)))
= SNu(h‘‘∏;1 U Mg(Neg(y): yêh‘‘(Δ–∏;1)))
= SNu(h‘‘∏;1 U Mg(Neg(y): yê(h‘‘Δ – h‘‘∏;1)))
= SNu(∏ U Mg(Neg(r): rê(h‘‘Δ –∏))) (Jmf. (5))

Men h(μ;-1({w})) = μ;-1(g({w})). Vi har derfor:

g(w) ês[SNu(∏ U Mg(Neg(r): rê(h‘‘Δ –∏)))]. Men ∏ var et vilkårlig element inkludert i h‘‘Δ. Dette viser at (+) holder.

Det er imidlertid også nødvendig å bevise:

(++) C(h‘‘Δ) =U.

Nå er det ganske klart (som forøvrig nevnt i tidligere bevis) at C(h‘‘Δ) Inkl U.
Det vil derfor være nok å godtgjøre at (10) U Inkl C(h‘‘Δ). Nå har vi fra forutsetningene at C(Δ)=U. Det følger at h‘‘C(Δ)= h‘‘U. Nå er h‘‘U=U ifølge det foregående lemma. Det følger at U = h‘‘C(Δ). For å bevise (10) vil det derfor være helt tilstrekkelig å bevise:

(11) h‘‘C(Δ) Inkl C(h‘‘Δ)

Anta for vilkårlig x at: (12) xêh‘‘C(Δ). Da må man ha (13) x=h(r) & rêC(Δ) for noe r. Ved hjelp av normalformsteoremet (Se Rognes [3], Teorem 33) må det finnes en ∏ der (14) ∏êPt(Pt(Δ)) og der man videre har:

(15) r = UNu(Mg(y: (ED)(Dê∏ &
y = K(SNu(Mg(Neg(r): rêD)), SNu(Δ–D))))

Fra (13), (15) og Lemma 3 har man videre:

(16) h(r) = UNu(Mg(h(y): (ED)(Dê∏ &
y = K(SNu(Mg(Neg(r): rêD)), SNu(Δ–D))))) =
UNu(Mg(z: (Ey)(z=h(y) & (ED)(Dê∏ &
y = K(SNu(Mg(Neg(r): rêD)), SNu(Δ–D)))))) =
UNu(Mg(z: (ED)(Dê∏ &
z = K(SNu(Mg(Neg(h(r)): rêD)), SNu(Mg(h(y): yê(Δ–D)))))))

Anta nå:

(17) (ED)(Dê∏ &
z = K(SNu(Mg(Neg(h(r)): rêD)), SNu(Mg(h(y): yê(Δ–D)))))

Da finnes det noe D der:

(18) Dê∏

(19) z = K(SNu(Mg(Neg(h(r)): rêD)), SNu(Mg(h(y): yê(Δ–D))))

Siden Δê∏ har vi D Inkl Δ og derfor at Δ–D Inkl Δ. Vi har derfor:

h‘‘(Δ–D) Inkl h‘‘Δ Inkl C(h‘‘Δ) og følgelig:

(20) SNu(Mg(h(y): yê(Δ–D)))êC(h‘‘Δ)

Tilsvarende ser man at (21) SNu(Mg(Neg(h(r)): rêD)êC(h‘‘Δ).

Det følger fra (19), (20) og (21) at zêC(h‘‘Δ) siden C(h‘‘Δ) er lukket under SNu og Neg. Men z var et vilkårlig objekt som oppfyllte (17). Fra dette, (16) og det faktum at C(h‘‘Δ) er lukket under UNu følger det x=h(r)êC(h‘‘Δ). Dette viser at (11) holder og gjør dermed beviset for satsen fullstendig. **QED**.

Lemma 6 Anta SInd(Δ) & C(Δ) =U. Anta videre at SInd(Δ;1) & C(Δ;1)=U. Da gjelder:
(Eg)(g: I–(1-1,på)–>I & (Ah)(h= (dxêU)(μ;-1(g‘‘s(x))) –> h‘‘Δ = Δ;1))

Bevis: Anta: (1) SInd(Δ) & C(Δ) =U og (2) SInd(Δ;1) & C(Δ;1)=U. Fra dette følger ved hjelp av Lemma 2 at (3) Δ≈Δ;1. Det finnes da en j slik at:

(4) j: Δ –(1-1,på)–> Δ;1.

(Vi har da, om xêPt(Δ), at j‘‘x Inkl Δ;1 og derfor j‘‘xêPt(Δ;1)) Fra (1) og (2) følger videre ved hjelp av Lemma 1 at det finnes to funksjoner f;1,f;2 der:

(5) f;1: I –(1-1,på)–> Pt(Δ)
f;2: I –(1-1,på) –> Pt(Δ;1)

og som dessuten oppfyller de følgende krav:

(6) (Aw)(wêI –> s[K(SNu(f;1‘w),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–f;1‘w))))] = {w})

(7) (Aw)(wêI –> s[K(SNu(f;2‘w),SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ;1–f;2‘w))))] = {w})

Definer nå funksjonen g;0 ved:

(8) g;0(w) = (f;2);-1(j‘‘(f;1(w))) om wêI.

Målet er da å vise at g;0 har de egenskaper som trengs. Det skulle i lys av (4) og (5) være lett å se at:

(9) g;0 : I –(1-1,på)–> I

La h være en vilkårlig entitet som er slik at:

(10) (dxêU)(μ;-1(g;0‘‘s(x)))

Vi ønsker da å vise at (+) h‘‘Δ = Δ;1. Anta rêΔ. Vi tar først sikte på å bevise den følgende påstand:

(11) s(r) = Mg((f;1);-1(x): xêPt(Δ) & rêx)

Anta xêPt(Δ) for vilkårlig x. Definer æ(x) ved:

æ(x)=SNu(x U Mg(Neg(r): rê(Δ–x)))

Vi skal først vise at: (12) r= UNu(Mg(æ(x): xêPt(Δ) & rêx))

(a) Anta for vilkårlig w at wês(r). Definer ∏;1 ved ∏;1= Mg(y: yêΔ & wês(y)). Da har vi ∏;1êPt(Δ) og rê∏;1. Det siste holder fordi vi jo nå antar at rêΔ. Vi har videre (Az)(zê∏;1 –> wês(z)). Og er pê(Δ–∏;1) har vi ¬(wês(p)). Dette innebærer at wês(Neg(p)). Det følger derfor at (Az)(zê(Δ–∏;1) –> wê(Neg(z))). Fra dette følger: wê(SNu(∏;1U Mg(Neg(r): rê(Δ–∏;1)))) = æ(∏;1). Vi har derfor vist:

wês(UNu(Mg(æ(x): xêPt(Δ) & rêx))). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (12) holder.

(b) Anta for vilkårlig w at wê(s(UNu(Mg(æ(x): xêPt(Δ) & rêx))). Da finnes det x;0 der (i) wêæ(x;0) & x;0êPt(Δ) & rêx;0. Fra wês(æ(x;0)) følger at

(Ay)(yêx;0 –> wês(y)). Men fra dette og det at rêx;0 følger ar wês(r). Dette viser at inklusjonen mot ventre holder. Vi har dermed vist riktigheten av (12).

Fra (6) og definisjonen av "æ(x)" utleder vi at:

(ii) (Aw)(wêI –> s(æ(f;1(w))) = {w})

Anta for vilkårlig w at (iii) wêMg((f;1);-1(x): xêPt(Δ) & rêx). Da finnes det x;0 der (iv) w= (f;1);-1(x;0) & x;0êPt(Δ) & rêx;0. Fra (ii) har vi wês(æ(f;1(w))). Men fra (iv) følger x;0=f;1(w) (i lys av (5)). Det følger at wês(æ(x;0)) & x;0êPt(Δ) & rêx;0. Dette impliserer: wês(UNu(Mg(æ(x): xêPt(Δ) &rêx)))

Anta på den annen side for vilkårlig w at:

(v) wês(UNu(Mg(æ(x): xêPt(Δ) &rêx))). Da finnes x;0 der:

(vi) wês(æ(x;0)) & x;0êPt(Δ) & rêx;0. Siden (vii) x:0êPt(Δ) har vi at det finnes w;1êI der (viii) (f;1)(w;1) = x;0 Videre må vi da ha, i lys av (ii) at

(ix) s(æ((f;1)(w))) = {w;1}. Ved hjelp av (viii) og (vi) følger: wês(æ((f;1)(w;1)))={w;1}. Man har derfor w;1=w, og derfor:

w=(f;1);-1(x;0) & x;0êΔ & rêx;0. Mao. wêMg((f;1);-1(x): xêPt(Δ) & rêx).

Vi har nå bevist at:

Mg((f;1);-1(x): xêPt(Δ) & rêx) = s(UNu(Mg(æ(x): xêPt(Δ) &rêx)))

Fra dette og (12) følger (11), slik at vi nå kan sies å ha levert et fullstendig bevis for denne påstanden.

Setter vi inn "f;2" istedet for "f;1" og "Δ;1" istedet for "Δ" i beviset for (11) ovenfor ser man at man punkt for punkt for et bevis for:

(13) (Ar)(rêΔ;1 –> s(r) = Mg((f;2);-1(x): xêPt(Δ;1) & rêx))

Ved hjelp av (11) og (13) skal vi nå vise at h=j. Dette vil umiddelbart i lys av (4) gi oss (+).

Anta rêΔ for vilkårlig r. Da har vi ved hjelp av (11) og (13) at følgende identiteter holder:

(14) s(h(r))
= s(μ;-1(g;0‘‘s(r)))
= g;0‘‘s(r)
= Mg((f;2);-1(j‘‘(f;1(w))): wês(r))
= Mg(z: (Ew)(wês(r) & z=(f;2);-1(j‘‘(f;1(w))))
= Mg(z: (Ew)((Eq)(w=(f;1);-1(q) &
qêPt(Δ)&rêq) & z=(f;2);-1(j‘‘(f;1(w)))))) (Jmf. (11))
= Mg(z: (Eq)(qêPt(Δ)&rêq & z= (f;2);-1(j‘‘q)))
= Mg((f;2);-1(j‘‘q)): qêPt(Δ)&rêq)

= Mg((f;2);-1(x): x Inkl Δ;1 & j(r)êx)
= s(j(r)) (Jmf. (13) ovenfor)

Dette viser at (15) (Ar)(rêΔ –> h(r)=j(r)). Men fra dette følger h=j. Fra (4) kan man slutte at j‘‘Δ = Δ;1. Men sammen med h=j, som nå er etablert, følger så (+). Dette avslutter vårt bevis for Lemma 6. **QED**.

Lemma 7 (Hovedlemma) Anta (i) SInd(Δ;0) & C(Δ;0)=U. Sette videre per definisjon:
(ii) G= Mg(<Mg(μ;-1(g‘‘s(x)): xêΔ;0),g >: g: I –(1-1,på) –>I)
Da har man:
(a) Func(G)
(b) Dom(G) = Mg(g: g:I –(1-1,på)–> I)
(c) Rgn(G) = Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ) = U)

Bevis: Det er temmelig lett å vise at G må være en funksjon og at Dom(G) = Mg(g: g:I –(1-1,på)–> I). Dette fremgår direkte fra definisjonen av G. La oss vise at (c) holder.

(I) Vi beviser først inklusjonen mot høyre i (c): Anta aêRgn(G) for vilkårlig a. Da finnes b der (1) bêDom(G) og hvor (2) <a,b>êG. Fra dette og definisjonen av G følger at:
(3) a= Mg(μ;-1(g‘‘s(x)): xêΔ;0) og at (4) b=g for noe g der
(5) g: I –(1-1,på)–> I
Sett nå per definisjon: (6) h= (dxêU)(μ;-1(g‘‘s(x))). Da har vi fra (6) og (3) at (7) h‘‘Δ;0=a. Fra (5), (6) og den første hypotesen i teoremet følger da ved hjelp av Lemma 5: SInd(h‘‘Δ;0) & C(h‘‘Δ;0) = U. Fra dette og (7) har vi SInd(a) & C(a)=U. Men herav aêMg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ)=U).

(II) Anta Δ;1êMg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ)=U). Da (1) SInd(Δ;1) & C(Δ;1)=U. Fra (i) og den første hypotesen i tepremet følger ved hjelp av Lemma 6 at det finnes en g der:
(2) g: I–(1-1,på)–>I & (Ah)(h= (dxêU)(μ;-1(g‘‘s(x))) –> h‘‘Δ;0 = Δ;1)
Sett h;0 = (dxêU)(μ;-1(g‘‘s(x))). da har man åpenbart <(h;0)‘‘Δ;0,g>êG. Fra dette og (2) følger: <Δ;1,g>êG. Men da Δ;1êRgn(G).

Dermed er det blitt gitt bevis for inklusjonene begge veier i (c). Dette avslutter beviset for Lemma 7. **QED**.

Teorem 2 [(EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U) &
A=Mg(g: g: I –(1-1,på)–>I)] –>
(EX)(X: A –(på)–>Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ)=U))

Bevis: Anta (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U). Definer G ved:
G= Mg(<Mg(μ;-1(g‘‘s(x)): xêΔ;0),g >: g: I –(1-1,på) –>I)
Da har vi i følge Lemma 7 at:
(2) G: Mg(g: g: I–(1-1,på)–>I) –(på)–> Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ)=U)
(Jmf. punkt (a) – (c) i Lemma 7). Det eneste vi behøver å vise er at
(Ex)(M(x) & x=G)
Nå har man at (3) Mg(g: g:I–(1-1,på)–>I) Inkl I^I. Videre har man:
(4) Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ) = U) Inkl Pt(U). Det følger da fra (3) og (4) ved hjelp av definisjonen av G at (5) G Inkl Prod(Pt(U), I^I). Nå har man generelt at hvis x og y er mengder så er også x^x, Pt(x) og Prod(x,y) mengder. Siden I og U er mengder følger da at Prod(Pt(U),I^I) er en mengde. Fra dette forhold, (5) og utsondringsaksiomet følger M(G). Herav har vi så M(x) & x=G for noe x. Fra dette og (2) følger så:

(EX)(X: Mg(g: g: I –(1-1,på)–>I)–(på)–>Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ)=U))
Dette avslutter beviset. **QED**.

Teorem 3 Man har:
(EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U) –>
Cd(Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ)=U))≤Cd(Mg(g: g: I –(1-1,på)–>I))

Bevis: Har man (Ef)(f: x–(på)–>y) følger ved hjelp av velkjente mengdeteoretiske satser at x»y. Herav Cd(y)≤Cd(x). Fra disse forhold og
Teorem 2 følger så satsen. **QED**.

§ 2

Vi skal nå gi bevis for endel rent mengdeteoretiske hjelpesetninger. Vi starter med:

Lemma 8 Anta M(X) & Cd(X)≥Aleph;0 & x,yêX & x≠y. Da gjelder:
Cd(Pt(X)) = Cd(Pt(X – {y,x}))

Bevis: Er X en mengde, x,yêX Cd(X)≥Aleph;0 og i tillegg x≠y har man i lys av velkjente mengdeteoretiske satser at X ≈ (X–{x,y}). Fra dette følger så at
Pt(X) ≈ Pt(X –{x,y}). I sin tur følger fra dette: Cd(Pt(X)) = Cd(Pt(X – {y,x})). **QED**.

Vi ser så på:

Lemma 9 Anta Cd(X)≥Aleph;0 og M(X). Da gjelder:
Cd(Pt(X)) = Cd(Mg(Y: M(Y) & Y Inkl X & Cd(X–Y)≥2))

Bevis: (a) Det er klart at:
(1) Mg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2) Inkl Pt(X). Vi har derfor i lys av den følgende velkjente setning: (Aa)(Ab)(M(a) & M(b) & a Inkl b –> a«b) at:
(2) Mg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2) « Pt(X)
(b) Det er nødvendig å bevise:
(+) Mg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2) » Pt(X)
Nå har vi etter forutsetningene at (0) Cd(X) ≥ Aleph;0. Det finnes derfor x,y der (1) x,yêX & x≠y. Da har man: (2) Pt(X–{x,y}) Inkl Mg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2)
For anta a er et vilkårlig objekt der man har (3) aêPt(X–{x,y}). Da følger (4) a Inkl (X–{x,y}) & M(a). Det følger at (5) a Inkl X & {x,y} Inkl (X–a). Dette innebærer at Cd(X–a)≥2. I lys av (5) kan vi da slutte:
aêMg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2). Dette viser at (2) holder. Fra (2) følger så: (6) Cd(Pt(X–{x,y})) ≤ Cd(Mg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2)). Men fra (0), Lemma 8 og det forhold at M(X) & x,yêX & x≠y følger: (7) Cd(Pt(X))= Cd(Pt(X–{x,y})). Fra (6) og (7) følger så (+). Dette avslutter dermed vårt bevis for Lemma 9. **QED**.

Den neste hjelpesetningen er den følgende:

Lemma 10 Anta M(X) & Cd(X) ≥ Aleph;0. Da finnes en f som oppfyller de følgende to krav:
(a) f: Mg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2) –(1-1) –> Mg(g: g: X –(1-1,på)–> X)

(b) (Aa)(aêPt(X) & Cd(X–a)≥Aleph;0 –>
Rest(f(a),a) = Rest(Id,a) & (Ax)(xê(X–a) –> f(a)‘x≠x))

Bevis: Anta M(X) og at Cd(X)≥Aleph;0. La a være et vilkårlig objekt der: aêMg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2). Definer f(a) på følgende måte:
Tilfelle (i): (X–a) er endelig. Da har man (X–a)= {c;1,...,c;n} for noe n≥2. Vi setter da X;a= {<c;1,c;2>,<c;2,c;3>,....,<c;n-1,c;n>,<c;n,c;1>}. (Vi forutsetter her at de diverse c;i'ene er distinkte.). I dette tilfellet defineres f(a) slik:

f(a) = Rest(Id,a)UX;a

Tilfelle (ii): (X–a) er uendelig. Da har vi Cd(X–a)≥Aleph;0. Vi kan da velge ut to mengder C1(a) og C2(a) som oppfyller de følgende krav:

(i) C1(a)UC2(a)= (X–a)
(ii) C1(a)ΩC2(a)=ø
(iii) C1(a) ≈ C2(a) ≈ (X–a)

Det følger da at det må finnes en funksjon j(a): C1(a) –(1-1,på)–> C2(a). Vi setter så g;a= j(a)U(j(a);-1) og definerer f(a) i dette tilfelle ved:

f(a)=(Rest(Id,a) U g;a)

Dermed er f(a) definert for alle aêMg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2).
Vi setter per definisjon:

f= Mg(<a,f(a)>: aêMg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2))

Det skulle da være åpenbart at:

Dom(f) = Mg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2)

Det skulle også være helt klart på basis av konstruksjonen av f at f er en funksjon. Fra konstruksjonen av f fremgår det også at f(a): X–(1-1,på)–>X om aêDom(f) og at:

(2) Rest(f,a)=Rest(Id,a) & (Ax)(xê(X–a) –> f(a)‘x≠x).

Det gjenstår derfor bare å vise at f er en-entydig. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes a;1,a;2êDom(f) & a;1≠a;2 og at (3) f(a;1)=f(a;2). Det følger at a;1,a;2 Inkl X og det enten finnes x;0 der (+) x;0êa &¬(x;0êa;2) eller omvendt. Vi ser bare på det ene av disse to tilfellene, siden det andre kan behandles på akkurat den samme måten som det første. Fra (2) og (3) har vi:

(4) Rest(f,a;1)=Rest(Id,a;1) & (Ax)(xê(X–a;1) –> f(a;1)‘x≠x)
(5) Rest(f,a;2)=Rest(Id,a;2) & (Ax)(xê(X–a;2) –> f(a;2)‘x≠x)

Vi må nå ha at x;0ê(X–a;2). Fra dette og (5) følger f(a;2)(x;0)≠x;0. Fra (3) har vi imidlertid: f(a;1)(x;0) = f(a;2)(x;0) og siden x;0êa;1 har man da fra (4) at f(a;2)(x;0)=x;0. Dette gir oss imidlertid en motsigelse. Dette avslutter beviset for hjelpesetningen. **QED**.

Lemma 11 Anta M(X) & Cd(X)≥Aleph;0. Da gjelder:

Pt(X) « Mg(g: g: X –(1-1,på)–> X) « X^X

Bevis: Ved hjelp av Lemma 10 har vi:

Mg(Y: YêPt(X) & Cd(X–Y)≥2) « Mg(g: g: X –(1-1,på)–>X) om Cd(X)≥ Aleph;0. Fra dette og Lemma 9 følger:

(1) Pt(X)) « Mg(g: g:X –(1-1,på)–> X)

På den annen side har vi:

Mg(g: g: X–(1-1,på)–> X) Inkl Mg(f: Func(f) & Dom(f)=X & Rgn(f) Inkl X).

Herav: (2) Mg(g: g: X –(1-1,på)–> X) « X^X. Fra (1) og (2) følger satsen. **QED**.

Lemma 12 Cd(X)≥Aleph;0 –> Pt(X) ≈ X^X.

Bevis: I Takeuti [1], 11.19 er følgende bevist:

(1) aêOn –> Cd(2^Aleph;a)= Cd(Aleph;a^Aleph;a)

Siden Cd(X)≥Aleph;0 finnes aêOn slik at Cd(X)= Aleph;a. Man har da at følgende holder:

Pt(X) ≈ 2^Aleph;a ≈ Cd(2^Aleph;a) =

Cd(Aleph;a^Aleph;a) ≈ Aleph;a^Aleph;a ≈ X^X **QED**.

Et umiddelbart korollar til Lemma 11 og Lemma 12 er den følgende setning:

Lemma 13 Cd(X)≥Aleph;0 –> Mg(g: g:X –(1-1,på) –>X) ≈ Pt(X)

Bevis: Man benytter Lemma 11 og Lemma 12. **QED**.

Vi har dermed bevist alle de rent mengdeteoretiske hjelpesetningene som vi har bruk for.

Teorem 3 og Lemma 13 impliserer den følgende setning:

Teorem 4 (Hovedteorem)

(EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U) –> Cd(Mg(Δ: SInd(Δ) & C(Δ)=U)) ≤ Cd(Pt(I))

Bevis: Dette er en opplagt konsekvens av Teorem 3 og Lemma 13 iden vi har at I er en mengde og at Cd(I)≥Aleph;0. **QED**.

§ 3

I den forrige paragrafen har vi gitt bevis for den ene halvdelen av det vi i §0 betegnet som Teorem (ii). I denne paragrafen tar vi sikte på å gi bevis for den andre halvdelen av dette teorem. Dette innebærer at vi ønsker å føre bevis for:

Teorem 5 (Hovedteorem)

(EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U) –>

(EX)(M(X) & X≈ I &

(Ef)(f: Pt(X) –(1-1)–> Mg(Δ': SInd(Δ') & C(Δ')=U)))

Bevis: Beviset som vi har konstruert for denne satsen er nokså komplisert og vil sannsynligvis kreve en god porsjon tålmodighet av leseren. Vi vil derfor, for å gjøre tanke gangen så oversiktlig som mulig, dele det inn i tydelig adskilte avsnitt.

(A) I Takeuti [1], §10.34 er den følgende sats bevist. Den kan også utledes på basis av de mengdeteoretiske aksiomene i T;1.

(+) (Aa)(Ab)(M(a) & M(b) & Cd(a)≥Aleph;0 & Cd(b)≥0 –>

Cd(Prod(a,b))= Cd(aUb) = Max(Cd(a),Cd(b))

Siden vi har at I er en mengde og Cd(I)≥ Aleph;0=ω og Cd(4)>0 følger fra (+), i det Max(Cd(I),Cd(4)) = Cd(I) at

(1) Cd(Prod(I,4)) = Cd(I).

Dette innebærer at Prod(I,4) og I er likemektige og at det derfor finnes en funksjon j der vi har:

(2) j: Prod(I,4) –(1-1,på)–> I

Vi minner om at vi nå, som vanlig, arbeider med von Neumanns versjon av ordinaltallene. Dette innebærer at 4 er identisk med {0,1,2,3}. Det skulle også være lett å se at vi må ha:

(3) Prod(I,4) = Mg(<w,0>: wêI) U Mg(<w,1>: wêI)U
Mg(<w,2>: wêI) U Mg(<w,3>: wêI)

og at de diverse mengdene i denne unionen er er innbyrdes uten felles elementer, dvs. disjunkte.

Vi definerer nå:

(4) B1 = j‘‘Mg(<w,0>: wêI)
B2 = j‘‘Mg(<w,1>: wêI)
A2 = j‘‘Mg(<w,2>: wêI)
A3 = j‘‘Mg(<w,3>: wêI)
A1= B1 U B2

Siden j er en-entydig og på I følger det at B1, B2, A2 og A3 er innbyrdes disjunkte og at unionen av dem er I. Det følger også at A1, A2 og A3 er innbyrdes disjunkte og at unionen av dem er I. Vi har med andre ord at det følgende holder i lys av (1) – (4):

(5.1) Ai Ω Aj=ø om i,jê{1,..,3} & i≠j
(5.2) UN(Mg(Ai: i=1,2,3)) = I
(5.3) B1 Ω B2=ø & B1U B2 U A2 U A3 = I

Nå har man om kê{0,1,2,3,4} at Mg(<w,k>: wêI) ≈ I. Vi har derfor siden j er en-entydig at:

(6.1) B1 ≈ B2 ≈ A2 ≈ A3 ≈ A1 ≈ I

At A1 ≈ I følger fra det at Cd(A1) = Cd(B1UB2) =
Max(Cd(B1),Cd(B2))= Max(Cd(I),Cd(I)) = Cd(I)

Vi har så langt konstruert et system av fem menger A1, A2, A3, B1 og B2 som oppfyller kravene (5.1) – (5.3) og (6.1).

(B) I det følgende skal vi anta at C er et vilkårlig element der

(7) CêPt(A2)

Vi definerer:

(8.1) H1;C = A1 UC
(8.2) H2;C = A3 U (A2–C)
(8.3) S^X = Mg(f: Func(f) & Rgn(f) Inkl {0,1} & Dom(f)=X) om X er en vilkårlig mengde.

Nå har vi etter forutsetningen i Teorem 5 at (EΔ)(SInd(Δ) & C(Δ)=U). Fra dette og Teorem 1 i §1 følger at det finnes g der vi har:

(9) gêOn & I ≈ 2^g & g≥ Aleph;0.

Siden g≥Aleph;0 har vi at g–{0} og g–{0,1} begge er likemektige med g. Fra dette,definisjonen av S^X, det at CêPt(A2) og (6.1) følger at:

(9.1) S^(g–{0,1}) ≈ S^(g–{0}) ≈ B1 ≈ B2 U C ≈ A3U(A2 – C)

Vi kan derfor velge ut funksjoner X1, X2;C, X3;C som er slik at:

(10.1) X1: S^(g–{0,1}) –(1-1,på)–> B1

(10.2) X2;C : S^(g–{0,1}) –(1-1,på) –> B2 U C
(10.3) X3;C : S^(g–{0}) –(1-1,på) –> A3 U (A2–C)

(C) Vi kan nå fullføre vår konstruksjon. Først defineres utsagnene a(C,0), a(C,1), og a(C,k) for g>k≥2 ved:

(11.1) a(C,0) = μ;-1(H1;C)
(11.2) a(C,1) = μ;-1(B1 U X3;C‘‘ Mg(c: cêS^(g–{0}) & c(1)=1))

Tilslutt setter vi for kêOn & k≥2:
(11.3) a(C,k) = μ;-1(X1‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1) U
X2;C‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1) U
X3;C‘‘ Mg(c: cêS^(g–{0}) & c(k)=1))

Dermed er a(C,k) definert for alle kêg.

Endelig fullfører vi konstruksjonen ved å sette:

(12.1) Δ;C = Mg(a(C,k): kêg)
(12.2) f = Mg(<C,Δ;C>: CêPt(A2))

Med f har vi konstruert den funksjonen vi ønsker dersom vi nå bare kan vise at:

(++) f: Pt(A2) –(1-1) –> Mg(Δ': SInd(Δ') & C(Δ')=U)

For vi har åpenbart at A2 er en mengde og at A2≈I. (Jmf. 6.1) Fra disse to ting og (++) følger så konsekventen i vårt hovedteorem, Teorem 5, om vi kan vise at f er en mengde som eksisterer. Dette er det forøvrig ikke så vanskelig å vise.

Vi vil vise at (Ex)(M(x) & =f) og (++) i de følgende avsnitt. Før dette anbefales leseren å studere figur 1 som gir en uformell, men anskuelig illustrasjon til konstruksjonen av f.

(D) Vi vil først vise at (13) (Ex)(M(x) & x=f). Nå har vi A2 Inkl I & M(A2). Det følger da ved hjelp av potensmengdeaksiomet at (14) M(Pt(A2)). Fra (12.1) fremgår det at :

(15) (AC)(CêPt(A2) –> Δ;C Inkl U)

Nå har man at U er en mengde og derfor ifølge potensmengdeaksiomet at Pt(U) er en mengde. Siden Pt(A2) og Pt(U) er mengder og man generelt har:

(Ax)(Ay)(M(x) & M(y) –> M(Prod(x,y))

følger det at Prod(Pt(A2)),Pt(U)) er en mengde, Fra (12.2) følger lett:

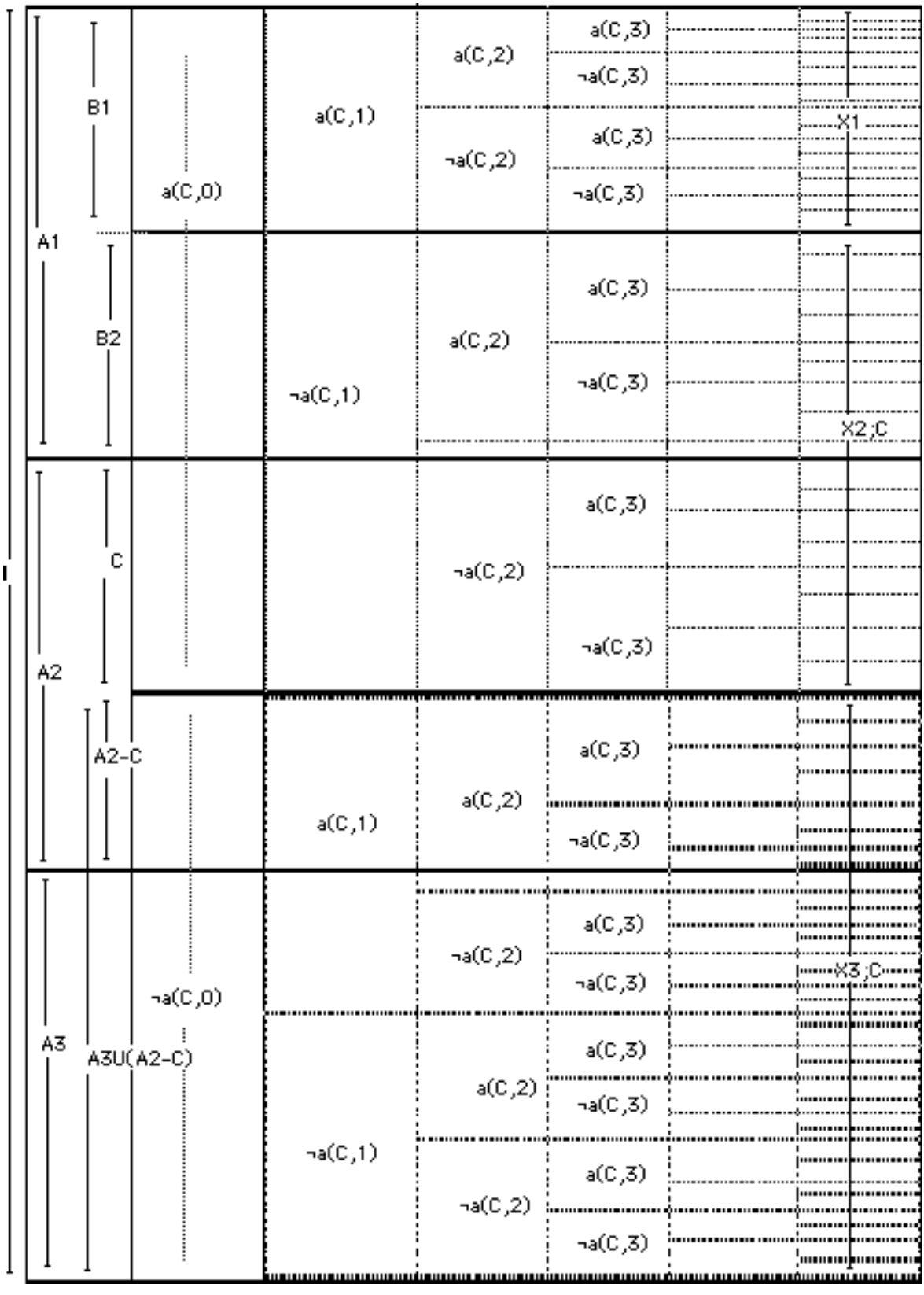
f Inkl Prod(Pt(A2)),Pt(U))

Fra dette følger så lett ved hjelp av utsondringsaksiomet at (Ex)(M(x) & x=f). Vi har dermed vist at f eksisterer og at f er en mengde.

(E) Fra definisjonen av f fremgår det også at f er en funksjon, at domenet til f er Pt(A2) og at verdiområdet til f er inkludert i Pt(U). Vi har derfor:

(16) Func(f) & Dom(f) =Pt(A2) & Rgn(f) Inkl Pt(U).

Figur 1


A1
B1
B2
A2
C
A2-C
A3
A3U(A2-C)
a(C,0)
¬a(C,0)
a(C,1)
¬a(C,1)
a(C,2)
¬a(C,2)
a(C,3)
¬a(C,3)
X1
X2;C
X3;C

(F) I dette avsnittet vil vi vise at:

(17) (AC)(CêPt(A2) –> SInd(Δ;C) & C(Δ;C) = U)

Vi vil da i lys av det som ble nevt under (E) ha vist at f avbilder Pt(A2) inn i mengden: Mg(Δ': SInd(Δ') & C(Δ')=U). La C være som ved (7). Det som da må bevises er at:

(18) SInd(Δ;C) & C(Δ;C)= U.

Da har vi også vist (17). For å bevise (18) er det tilstrekkelig å bevise følgende to ting, nemlig:

(19) wêI –>
(E∏)[∏êPt(Δ;C) & wês(K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C –∏)))))]

og

(20) (A∏)(∏êPt(Δ;C) –> (Ew)(wêI &
{w} = s[K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C –∏))))])

Fra (20) følger direkte ved hjelp av definisjonen av "SInd(Δ)" at SInd(Δ;C).

Den ene halvdelen av C(Δ;C) = U, nemlig C(Δ;C) Inkl U, følger direkte ved hjelp av Teorem 31 i Rognes [3]. Den andre halvdelen, U Inkl C(Δ;C) følger ved hjelp av (19) og (20):

For anta xêU. Fra (19) følger da at for hver wês(x) finnes det en k(w) slik at:

(21) k(w) Inkl Δ;C & M(k(w)) og der:
wês[K(SNu(k(w)), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C –k(w)))))]

Fra dette og (20) følger så at:

(22) {w}= s[K(SNu(k(w)), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C –k(w)))))]

Siden vi har x=UNu(Mg(μ;1({w}): wês(x))) følger ved hjelp av (22) at:

x= UNu(Mg(K(SNu(k(w)), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C –k(w))))): wêI)). Men siden k(w) Inkl Δ;C for alle wês(x) og C(Δ;C) er lukket under uendelig konjunksjon, negasjon og disjunksjon følger herav at xêC(Δ;C).

Dette viser at det er tilstrekkelig å vise (19) og (20) for å vise at (18) holder.

(G) *Bevis for (19)* Beviset for (19) er langt. Det vil kreve utholdenhet og tålmodighet av leseren.

Anta for vilkårlig w at (23) wêI. Vi sondrer mellom tre tilfelle som er gjensidig eksklusive og samlet uttømmende ifølge (5.1) – (5.3).

Tilfelle (i): wêB1. Fra dette og (10.1) følger at X1;-1(w)êS^(g –{0,1}). Definer nå ∏ på den følgende måte:

(24) ∏ = {a(C,0), a(C,1)}U Mg(a(C,k): 2≤kêg & (X1;-1(w))‘k =1)

Da er det klart fra definisjonen av Δ;C at ∏ Inkl Δ;C. Det er dessuten lett å vise at ∏ er en mengde.

Vi viser først:

(25) (Ax)(xê∏ –> True(w,x))

Anta xê∏. Er x= a(C,0) har vi s(x) = H1;C = A1UC. Men wêB1 Inkl A1UC=s(x). Det følger at True(w,x). Er x=a(C,1) har vi wêB1 Inkl s(x) i lys av definisjonen av "a(C,1)". Det følger åpenbart at True(w,x).

Anta x=a(C,k) for noe k der 2≤kêg og at (X1;-1(w))‘k =1. Siden X1;-1(w)êS^(g–{0,1}) har vi at:

X1;-1(w) êMg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1) Inkl Dom(X1). Da har man i lys av (11.3) at: w=X1(X1;-1(w)) êX1‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1) Inkl s(a(C,k)). Men fra dette følger True(w, a(C,k)). Dette viser at (25) holder.

Det er også påkrevet at vi beviser:

(26) (Ax)(xêΔ;C–∏ –> True(w, Neg(x))). Med andre ord at:

(26.1) (Ax)(xê(Δ;C–∏) –> wês(Neg(x))).

Anta for vilkårlig x at xê(Δ;C–∏). Da har vi ved hjelp av (12.1) at x=a(C,k) for noe kêg. Siden ¬(xê∏) har vi ved hjelp av (24) at x≠a(C,0) & x≠a(C,1). Det følger derfor at k≥2. Fra dette og (24) og det at wêB1 følger (27) X1;-1(w)'k=0. For i motsatt fall ville vi ha at X1;-1(w)'k=1 & k≥2 & x=a(C,k) og da ville xê∏. Men dette forutsetter vi jo nå at er umulig. Nå er wêB1. Anta for reduktio ad absurdum at True(w, a(C,k)). Da har vi ved hjelp av (10.1) og (11.3) at :

wêX1''Mg(c: cêS^(g–{0,1}) &c(k)=1)

Herav følger at det finnes c der w=X1(c) & cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1. Da har vi siden X1 er en korrelasjon at c= X1;-1(w) og derfor at X1;-1(w)'k=1. Men dette strider mot (27). Det må altså være slik at (26) holder. Men fra (25) og (26) følger konsekventen i (19) i lys av ∏ Inkl Δ;C.

Tilfelle (ii): wê(B2UC). Fra dette og (10.2) følger (X2;C);-1(w)êS^(g–{0,1}). Definer i dette tilfellet ∏ ved:

(28) ∏ = {a(C,0)} U Mg(a(C,k): k≥2 & kêg & (X2;C);-1(w)'k =1)

Fra definisjonen av Δ;C ser man da lett at ∏ Inkl Δ;C. Videre skulle det ikke være vanskelig å vise at ∏, definert på denne måten, er en mengde.

Vi beviser først:

(29) (Ax)(xê∏ –> True(w,x))

Anta x=a(C,0). Da har man wêB2UC Inkl A1UC = s(x) og derfor at True(w,x).

Anta x=a(C,k) for noe k der 2≤kêg & (X2;C);-1(w)'k =1. Siden

(X2;C);-1(w)êMg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1) har vi da ved hjelp av (11.3) at w= (X2;C)((X2;C);-1(w))êX2;C''Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1) Inkl s(a(C,k)). Det følger at True(w,x). Dette viser at (29) holder.

Det er også nødvendig å bevise:

(30) (Ax)(xê(Δ;C–∏) –> True(w, Neg(x)))

Anta derfor for vilkårlig x at xê(Δ;C–∏). Da har vi xêΔ;C og derfor at x=a(C,k) for noe kêg. Siden ¬(xê∏) følger det i lys av (28) at man må ha (31) k≠0. Vi må derfor enten ha at k=1 eller at k≥2. I det første tilfelle har vi at x=a(C,1). Men wê(B2UC) og ifølge 11.1 har vi:

a(C,1) = μ;-1(B1 U X3;C'' Mg(c: cêS^(g–{0}) & c(1)=1))

Nå er Rgn(X3;C)= A3 U (A2-C), og denne mengden, såvel som B1, er uten felles elementer med B2UC. Det følger at ¬(wês(a(C,1)) og derfor at wês(Neg(a(C,1)))=s(Neg(x)). Det følger at True(w,Neg(x)) i dette tilfellet.

I tilfelle k≥2 kan vi ikke ha (X2;C);-1(w)'k=1. For i så fall ville vi i lys av (28) ovenfor ha x=a(C,k)ê∏. Derfor må vi ha (32) (X2;C);-1(w)'k=0. Anta for reduktio ad absurdum (forøvrig på samme måte som ved det forrige tilfellet) at True(w,a(C,k)). Siden wê(B2UC), k≥2 og kêg har vi da i lys av (11.3) og (10.1) – (10.3) at wêX2;C''Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1). Da har vi w=X2;C(c) der c(k)=1 for noe c. Da (X2;C);-1(w)=c og derfor at (X2;C);-1(w)'k=1. Men dette strider mot (32). Vi har derfor ¬(wês(a(C,k))) og derfor at True(w,Neg(a(C,k))). Dette innebærer siden x=a(C,k) at True(w,Neg(x)) som er det vi ønsker.

Vi har dermed vist at (30) holder. Fra (29) og (30) samt det at ∏ Inkl Δ;C følger konsekventen i (19). Denne påstanden holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (iii): wêA3U(A2–C). I dette tilfelle setter vi:

(33) ∏= Mg(a(C,k): 1≤kêg & (X3;C);-1(w)'k = 1)

Igjen ser man fra denne definisjonen at ∏ Inkl Δ;C. Det byr heller ikke på problemer å vise at ∏ er en mengde.

Først viser vi:

(34) (Ax)(xê∏ –> True(w,x))

Anta xê∏. Da har vi ifølge (3) x=a(C,k) for noe k der 1≤kêg & (X3;C);-1(w)‘k=1. Er k=1 har vi i lys av (10.3) at w= X3;C(c) & cêS^(g–{0}) for noe c. Siden X3;C er en-entydig følger at c=(X3;C);-1(w). Vi må da, siden (X3;C);-1(w)‘k=1 og k=1 ha at c(1)=1. Dette innebærer at:

wêX3;C‘‘ Mg(c: cêS^(g–{0}) & c(1)=1) Inkl s(a(C,1))=s(x). Det følger at True(w,x).

Er k≥2 har vi siden wêA3U(A2–C) i lys av definisjonen av X3;C at det må finnes c slik at w=X3;C(c) & cêS^(g–{0}). Siden xê∏ følger også at (X3;C);-1(w)‘k=1. Dette innebærer at c(k)=1. Vi har derfor ved hjelp av definisjonen av a(C,k) at wês(a(C,k))=s(x). Dette innebærer at True(w,x) og viser at (34) holder.

Det er også nødvendig å godtgjøre at:

(35) (Ax)(xê(Δ;C–∏) –> True(w, Neg(x)))

Anta derfor at xê(Δ;C–∏). Da er x=a(C,k) for noe kêg. Anta k=0. Vi har da at s(a(C,k))=s(a(C,0))= H1;C=A1UC. Men A1UC er disjunkt med A3U(A2–C) som etter forutsetningen inneholder w. Det følger wês(Neg(a(C,k)))=s(Neg(x)) i dette tilfellet. Er k≥1 kan vi ikke ha (X3;C);-1(w)‘k=1 for i så fall ville vi etter (33) ha a(C,k)ê∏. Derfor har vi (#) (X3;C);-1(w)‘k=0. Siden weA3U(A2–C) har man da i lys av (11.3), (11.2), (10.1) – (10.3) at:

wêX3;C‘‘ Mg(c: cêS^(g–{0}) & c(k)=1)

Da finnes det c der w=X3;C(c) & c(k)=1. Dette innebærer at (X3;C)(w)‘k=1. Dette strider åpenbart mot (#). Det følger at wê(I–s(a(C,k)))= s(Neg(a(C,k)))=s(Neg(x)).
Med andre ord har vi True(w,Neg(x)) også i dette tilfellet. Dette viser at (35) holder.

Fra (34), (35) og det at ∏ Inkl Δ;C følger igjen konsekventen i (19). Vi har derfor vist at (19) holder i alle tilfelle og dermed levert et fullstendig bevis for denne påstanden. I det neste avsnittet beviser vi (20).

(H) Etter at vi nå har vist at (19) holder står det fremdeles endel "strevsomme tankestrabaser" igjen. Det gjenstår tydeligvis å bevise at (20) holder og dessuten at f er en en-entydig funksjon. I dette avsnittet beviser vi (20).

Anta for vilkårlig ∏ at (36) ∏êPt(Δ;C). Vi sondrer da mellom tre tilfeller, nemlig det tilfelle at a(C,0), a(C,1)ê∏, det tilfelle at a(C,0)ê∏ & ¬(a(C,1)ê∏) og tilslutt det tilfelle at ¬(a(C,0)ê∏). Vi viser at konsekventen i (20) kan utledes i alle disse tilfellene.

Tilfelle (i): a(C,0), a(C,1)ê∏. Vi må vise at det finnes en w som oppfyller kravene i konsekventen i (20). Definer derfor c;0êS^(g–{0,1}) ved å sette at c;0(k)=1 om a(C,k)ê(∏–{a(C,1),a(C,0)}) og c;0(k)=0 om dette ikke er tilfellet, mao. hvis ¬(a(C,k)ê(∏–{a(C,1),a(C,0)})). Dermed er funksjonen c;0 definert. Definer så verdenen w ved å sette w=X1(c;0). Siden Rgn(X1) Inkl I har vi da åpenbart at wêI. Vi viser først de følgende to ting:

(37.1) (Ax)(xê∏ –> True(w,x))

(37.2) (Ax)(xê(Δ;C –∏) –> True(w,Neg(x)))

Vi tar først for oss (37.1). Anta xê∏. Er x=a(C,0) har vi siden w=X1(c;0) at wêB1 Inkl A1 Inkl A1UC = H1;C= s(a(C,0)). Vi har derfor i dette tilfellet at True(w,x). Er x=a(C,1) har vi siden w=X1(c;0)êB1 Inkl s(a(C,1)) (Jmf. (11.2) at True(w,a(C,1)). Dette innebærer at True(w,x). Er xê(∏–{a(C,1),a(C,0)}) har vi, siden ∏ Inkl Δ;C, at x=a(C,k) for

noe kêg der k≥2. Fra definisjonen av c;0 har vi i så fall at c;0(k)=1. Men w=X1(c;0) & c;0êS^(g–{0,1}). Da:

wêX1‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1) Inkl s(a(C,k))=s(x). Man kan i denne sammenheng konsultere definisjonen av a(C,k) når k≥2. Vi har altså at True(w,x) også i dette tilfellet. Dette viser at (37.1) holder.

La oss så ta for oss beviset for (37.2). Anta xê(Δ;C–∏). Da har vi at xêΔ;C og derfor at x=a(C,k) for noe kêg. Det er da klart at k≠0 og k≠1. For i motsatt fall ville xê∏, noe som nå forutsetter at er utelukket. Vi har derfor at k≥2 og at ¬(a(C,k)ê(∏–{a(C,1),a(C,0)})). Det følger da ved hjelp av definisjonen av c;0 at (+) c;0(k)=0. Anta for reduktio ad absurdum at wês(a(C,k)). I lys av (11.3) og (10.1) – (10.3) og det at w=X1(c;0)êB1 følger da at :

wê1‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1)

Det må da finnes c som er slik at w=X1(c) & c(k)=1. Men X1 er en-entydig og derfor følger det at c=c;0. Dette innebærer i sin tur at c;0(k)=c(k)=1. Dette strider mot (+). Vi har derfor ¬(wês(a(C,k)) og derfor at True(w, Neg(a(C,k))). Dette innebærer at True(w,Neg(x)).

Dermed er (37.1) og (37.2) etablert. Fra disse to setningene følger så:

(37.3) {w} Inkl s(K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C–∏))))).

Vi må imidlertid også vise at inklusjonen mot venstre holder her. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes w;1 der vi har:

(37.4) w;1≠w & (Ax)(xê∏ –> True(w;1,x)) &
(Ax)(xê(Δ;C–∏) –> True(w;1, Neg(x)))

Siden a(C,0), a(C,1) ê∏. har vi da at w;1ês(a(C,1)) & w;1ês(a(C,0)). Fra (11.1) og (11.2) fremgår det da at w;1êB1=Rgn(X1). Det følger at det finnes c;1 slik at X1(c;1)=w;1 og der c;1êS^(g–{0,1}). Siden w;1 forutsettes å være forskjellig fra w og vi har at w=X1(c;0) & w;1= X1(c;1) følger det at c;0≠c;1 siden X1 er en-entydig. Dette i sin tur innebærer at det finnes noe r der 2≤rêg slik at (++) c;1(r)≠c;0(r). Vi betrakter da a(C,r).

Tilfelle (a). Anta a(C,r)ê∏. Fra (37.4) og (37.1) følger da at: True(w;1,a(C,r)) & True(w,a(C,r)). Siden w;1 ,wêB1 følger da i lys av (11.3) at:

w;1êX1‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(r)=1) &
wêX1‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(r)=1)

Da har vi w;1=X1(c') & c'(r)=1 og w=X1(c") & c"(r)=1 for noen c,c"êS^(g–{0,1}). Men X1 er en-entydig og vi har fra tidligere: w;1=X1(c;1) & w=X1(c;0). Da har vi at c;1= c' & c;0= c". Men da c;1(r)=c'(r)=1=c"(r)=c;0(r). Dette strider mot at c;1(r)≠c;0(r). dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (b). Anta a(C,r)ê(Δ;C–∏). Da har vi w;1ês(Neg(a(C,r))) og wês(Neg(a(C,r))). Siden w;1,wêB1 har vi i lys av (10.1) – (10.3) og (11.3) at c;0(r)=0 = c;1(r). Men dette strider igjen mot (++). Derfor er også dette tilfellet umulig.

I begge tilfellene kan vi altså utlede en motsigelse. Dette innebærer at det ikke kan finnes w;1êI slik at (37.4) holder. Sammen med (37.3) impliserer dette:

{w} = s(K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C–∏)))))

(20) holder altså i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): a(C,0)ê∏ & ¬(a(C,1)ê∏). Definer en funksjon c;0êS^(g–{0,1}) ved å sette c;0(k)=1 om a(C,k)ê∏ og c;0(k)=0 om ¬(a(C,k)ê∏) (k≥2). Definer så w;0 ved å sette w;0=X2;C(c;0). I første omgang skal vi vise:

(38.1) (Ax)(xê∏ –> True(w;0,x))

(38.2) (Ax)(xê(Δ;C –∏) –> True(w;0,Neg(x)))

La oss først se på (38.1): Anta xê∏. Er da x=a(C,0) har vi siden:

w;0=X2;C(c;0)êB2 UC Inkl A1UC = s(a(C,0)) (Jmf. (11.1) og (10.2)) at True(w;0,x). Er xê(∏ – {a(C,0)}) har vi at x= a(C,r) for r≥2. Vi har da etter definisjonen av

c;0 at c;0(r)=1. Men da w;0= X2;C(c;0) & c;0êS^(g–{0,1}) & c;0(r)=1. Fra dette og (11.3) følger at w;0ês(a(C,r)). Dette innebærer at True(w;0,a(C,r)). Vi har nå vist at (38.1) holder.

La oss dernest se på (38.2): Anta xê(Δ;C–∏). Er x=a(C,1) har vi, siden w;0êRgn(X2;C)= B2UC, at w;0ês(Neg(a(C,1))) i lys av (11.2). Er x=a(C,r) for r≥2 har vi i lys av definisjonen av c;0 at c;0(r)=0. Anta for reduktio ad absurdum at w;0ês(a(C,r)). Da har man i lys av (11.3) og (10.1)–(10.3) og det at w;0êB2UC at:

w;0êX2;C‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(r)=1) Da w;0=X2;C(c) & c(r)=1 Men siden X2;C er en-entydig og w;0 =X2;C(c;0) følger da c;0=c og derfor c;0(r)=1 som strider mot at c;0(r)=0. Derfor True(w;0, Neg(a(C,r))). Det vil si at True(w,x).

Dette viser at (38.2) holder. Fra (38.1) og (38.2) følger :

(38.3) w;0ês(K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C–∏)))))

Det er imidlertid nødvendig å vise at:

{w} = s(K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C–∏)))))

Beviset blir i visse henseende analogt (men ikke identisk) med det som ble gitt i det forrige tilfelle. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes en w;1êI der man har:

(38.4) w;1≠w;0 & w;1ês(SNu(∏)) & (Ax)(xê(Δ;C–∏) –> True(w;1,Neg(x)))

Siden a(C,0)ê∏ og ¬(a(C,1)ê∏) har vi at w;1ês(a(C,0)) & w;1ês(Neg(a(C,1))). Fra (11.1) og (11.2) har vi da: w;1êB2UC=Rgn(X2;C). Da finnes det c;1 slik at:

c;1êS^(g–{0,1}) & X2;C(c;1)= w;1. Siden w;1≠w,0 og X2;C er en-entydig har man at c;1≠c;0. Det må da finnes noe r der rêg & r≥2 slik at (+) c;1(r)≠c;0(r). Vi betrakter utsagnet a(C,r). Det er to muligheter:

(a) a(C,r)ê∏. Da har vi fra (38.3) og (38.4) at w;1ês(a(C,r)) & w;0ês(a(C,r)). Siden w;1,w;0êB2UC har man da i lys av (11.3) at

w;1êX2;C‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(r)=1) &
w;0êX2;C‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(r)=1)

Dette innebærer at det må finnes c;1' og c;0' slik at:

w;1= X2;C(c;1') & c;1'(r)=1 & w;0= X2;C(c;0') & c;0'(r)=1

Men nå er X2;C en-entydig og w;1= X2;C(c;1) & w;0= X2;C(c;0). Vi må derfor ha:

c;0(r) = c;0'(r)=1= c;1'(r) = c;1(r). Men dette strider mot (+).

(b) Er ¬(a(C,r)ê∏) har vi atter ved hjelp av (38.3) og (38.4) at True(w;1, Neg(a(C,r))) & True(w;0,Neg(a(C,r))). Siden w;1,w;0êB2UC har vi da i lys av (11.3) og (10.1) – (10.3), samt det at w;0=X2;c(c;0) & w;1=X2;C(c;1) at:
c;1(r)= 0 = c;0(r). Men dette også strider åpenbart mot (+).

Det følger derfor at det ikke kan finnes noen w;1 som oppfyller kravet (38.4). Dette sammen med (38.3) impliserer konsekventen i (20).

Tilfelle (iii): ¬(a(C,0)ê∏). Vi definerer da en funksjon c;0êS^(g–{0}) ved å sette at c;0(k) = 1 om a(C,k)ê∏ og c;0(k)=0 om ¬(a(C,k)ê∏) (k≥1). Vi definerer så w;0 ved å sette w;0=X3;C(c;0). Dette innebærer at w;0êI. Som i de foregående tilfelle ønsker vi nå å bevise:

(39.1) (Ax)(xê∏ –> True(w;0,x))

(39.2) (Ax)(xê(Δ;C–∏) –> True(w;0,Neg(x)))

Vi tar først for oss (39.1): Anta xê∏. Da har vi x=a(C,k) for noe k der 1≤kêg. Siden w;0=X3;C(c;0) har vi i lys av (10.3) at w;0êA3U(A2–C). Fra definisjonen av c;0 følger: c;0(k)=1. Fra dette, det at w;0=X3;C(c;0) & c;0êS^(g–{0}) følger i lys av (11.2) og (11.3) at w;0ês(a(C,k)) og derfor at True(w,x). Dette viser at (39.1) holder.

Vi ser så på (39.2): Anta for vilkårlig x at xê(Δ;C–∏). da har vi x=a(C,k) for kêg. Anta k=0. Da x=a(C,0). Nå er w;0êA3U(A2–C). Men s(a(C,0))=A1UC. Det følger at ¬(True(w;0,a(C,0))). Herav True(w;0,Neg(x)). Er k≥1 har vi i lys av definisjonen av c;0 at

(+) c;0(k)=0. Nå er w;0=X3;C(c;0). Anta for reduktio ad absurdum at w;0ês(a(C,k)). Siden w;0êA3U(A2–C) har vi i lys av (10.1) – (10.3), (11.2) og (11.3) at: w;0êX3;C‘‘ Mg(c: cêS^(g–{0}) & c(k)=1) (k≥1). Da har vi at det finnes c slik at w;0=X3;C(c) & cêS^(g–{0}) & c(k)=1. Men X3;C er en-entydig. Derfor må c=c;0. Det følger at c(k)=c;0(k)=1. Men dette strider åpenbart mot (+). Det følger at True(w;0, Neg(a(C,k))). Mao. True(w;0,Neg(x)). Dette viser at (39.2) holder.

Fra (39.1) og (39.2) følger:

(39.3) {w;0} Inkl s(K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C–∏)))))

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes en w;1êI der følgende holder:

(39.4) w;1≠w;0 & (Ax)(xê∏ –> True(w;1,x)) &
(Ax)(xê(Δ;C–∏) –> True(w;1, Neg(x)))

Siden ¬(a(C,0)ê∏) har vi da w;1ês(Neg(a(C,0))). Dette innebærer at w;1 ikke kan være med i A1UC=s(a(C,0)). (Se (11.1) og (8.1)). Fra dette følger at w;1êA3U(A2–C) = Rgn(X3;C). Da må det finnes en c;1 slik at:

w;1= X3;C(c;1) & c;1êS^(g–{0}). Siden w;1≠w;0 og w;0=X3;C(c;0), og vi dessuten har at X3;C er en-entydig, har vi at c;1≠c;0. Det må derfor finnes en k der 1≤k≤g der (#) c;0(k)≠c;1(k). På samme måte som i de forgående tilfelle ser vi nå på to undertilfelle:

(a) a(C,k)ê∏. Da har man fra (39.3) og (39.4) at w;1ês(a(C,k)) & w;0ês(a(C,k)). Siden w;1,w;0êA3U(A2–C) har vi i lys av (11.2) og (11.3) at:

w;1êX3;C‘‘ Mg(c: cêS^(g–{0}) & c(k)=1) &
w;0êX3;C‘‘ Mg(c: cêS^(g–{0}) & c(k)=1)

Dette impliserer at det finnes c;1' og c;0' slik at:

w;1=X3;C(c;1') & c;1'(k)=1 & w;0= X3;C(c;0') & c;0'(k) =1.

Siden X3;C er en-entydig har vi da:

c;1(k)= c;1'(k)= 1= c;0'(k) = c;0(k). Men dette strider åpenbart mot (#).

(b) a(C,k)ê(Δ;C–∏). Da har vi i lys av (39.3) og (39.4) at
True(w;1, Neg(a(C,k))) & True(w;0, Neg(a(C,k)))

Siden w;0,w;1êA3U(A2–C) og k≥1 (kêg) har vi da ved hjelp av (10.1) – (10.3), (11.2) og (11.3) og det faktum at w;0=X3;C(c;0) & w;1=X3;C(c;1) at:

c;0(k) = 0 = c;1(k). Men også dette strider mot (#). Begge tilfelle er altså ekskludert og det kan derfor ikke finnes noen w;1 som oppfyller (39.4). Dette og (39.3) impliserer:

{w;0} = s(K(SNu(∏), SNu(Mg(Neg(r): rê(Δ;C–∏)))))

Også i dette tilfellet holder derfor konsekventen i (20).

I alle de tre tilfelle vi har studert holder konsekventen i (20). Dermed har vi fullført beviset for (20).

(I) Det gjenstår nå bare en ting, nemlig å vise at f er en-entydig. Fra definisjonen av f fremgår det at det er nok å vise:

(40) C;1,C;2êPt(A2) & C;1≠C;2 –> Δ;(C;1) ≠ Δ;(C;2).

Anta derfor for vilkårlige C;1, C;2 at :

(41) C;1,C;2êPt(A2) & C;1≠C;2. For å vise at (40) holder vil det være tilstrekkelig å bevise:

(42) (Ak)(kêg –> a(C;1,0) ≠ a(C;2,k)).

For fra dette følger at (Ex)(xêΔ;(C;1) & (Ay)(yêΔ;(C;2) –> y≠x)). Fra dette følger i sin tur (Ex)(xêΔ;(C;1) & ¬(xêΔ;(C;2))). Fra dette kan man åpenbart slutte Δ;(C;1)≠Δ;(C;2). Vi tar derfor sikte på å bevise (42).

Anta derfor for vilkårlig k at (43) kêg. Vi sondrer mellom tre tilfelle:

Tilfelle (i): k=0. Da har vi at s(a(C;1,0)) = A1UC1 og at s(a(C;2,0))= A1UC2. Siden C;1≠C;2 og C;1 og C2 er disjunkte med A1 følger herav at a(C;1,0)≠ a(C;2,0). Satsen holder derfor i dette tilfellet.
Tilfelle (ii): k=1. Vi har B2≠ø og derfor at det finnes w;2 der w;2êB2. Siden vi da må ha w;2êH;(C;1)= A1UC;1 har vi w;2ês(a(C;1,0)). Men:

s(a(C;2,1)) = B1 U (X3;(C;2))‘‘ Mg(c: cêS^(g–{0}) & c(1)=1))

Siden X3;(C;2) har A3U (A2–C;2) som sitt verdiområde og A3U(A2–C;2) ikke har noen felles elementer med B2 følger at ¬(w;2ês(a(C;2,1))). Vi har derfor:

s(a(C;1,0))≠ s(a(C;2,1)) og følgelig a(C;1,0)≠ a(C;2,1).

Tilfelle (iii): k≥2. Vi betrakter a(C;2,k). Vi har at:

(B1 – X1‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1)≠ø

Da finnes det x;0ê(B1 – X1‘‘Mg(c: cêS^(g–{0,1}) & c(k)=1). da er w;0êB1 og i lys av (11.3) og (10.1)– (10.3) har vi da ¬(w;0ês(a(C;2,k)). Men

w;0êB1 Inkl A1UC1=s(a(C;1,0)). Det følger at s(a(C;1,0))≠ s(a(C;2,k)) og derfor at a(C;1,0)≠a(C;1,k). Dette viser at (42) også holder i dette siste tilfellet.

Dermed har vi bevist at (40) holder. Men med dette har vi også fullført den oppgaven vi satte oss, nemlig å gi et fullstendig bevis for Teorem 5. Denne sats kan nå anses for bevist. **QED**.

Vi har nå gitt bevis for alle de påstander som ble nevnt i Del I. Våre undersøkelser i dette essay kan derfor anses som avsluttet.

Referanser

Referanser

Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1987
Takeuti [1], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Introduction to Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.
Wittgenstein [1], Wittgenstein, Ludwig, Tractatus logico-philosophicus, Suhrkamp Verlag, 1964.

***